INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Dr. B. Klar

WS 2003/04

Klausur

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für Informatiker

vom 26.2.2004

Musterlösungen

A

Aufgabe A1

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{10}, y_{10})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.6	1.9	2.8	3.6	5.1	5.7	6.7	8.1	9.4	10.4
y_j	10	13.3	7.8	7.2	7.2	1.7	3.1	0	−3.1	−9.5

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.
Lösung: Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

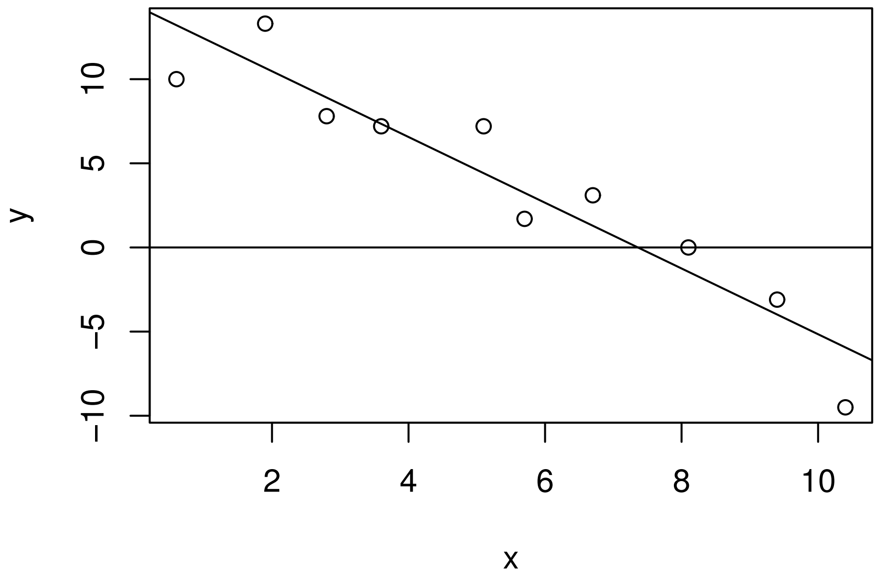
$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\bar{x} = 5.43 \qquad s_x = 3.256$$
$$\bar{y} = 3.77 \qquad s_y = 6.763$$
$$r_{xy} = -0.9406$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.
Lösung: Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned} b^* &= -1.953 \\ a^* &= 14.38 \end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = 14.38 - 1.953 \cdot x$.



Punkte und Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$

Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y-Werte. Es ist

$$y_{()} = (-9.5,\ -3.1,\ 0,\ 1.7,\ 3.1,\ 7.2,\ 7.2,\ 7.8,\ 10,\ 13.3)$$

c) Berechnen Sie das 0.15-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.15}$ von $(y_1, \ldots, y_{10})$.
Lösung: Mit $k = [10 \cdot 0.15] = 1$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.15} = \frac{1}{10 - 2 \cdot 1} \cdot (y_{(2)} + \ldots + y_{(9)}) = 4.237$$

d) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \ldots, y_{10})$.
Lösung: Da $0.25 \cdot 10 = 2.5$ und $0.75 \cdot 10 = 7.5$ beide nicht ganzzahlig sind, ergibt sich mit $k_1 = [2.5] = 2$ und $k_2 = [7.5] = 7$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{0.25} &= y_{(k_1+1)} = y_{(3)} = 0 \\ \tilde{y}_{0.75} &= y_{(k_2+1)} = y_{(8)} = 7.8 \end{aligned}$$

und damit der Quartilsabstand zu $\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = 7.8$.

Aufgabe A2

X, Y seien zwei Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, c\}$, $c \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, bzw. $\{0, 1, 2\}$. Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $(i, j) \in \{0, 1, c\} \times \{0, 1, 2\}$ an.

Y \ X	$i = 0$	$i = 1$	$i = c$
$j = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$j = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$j = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

a) Berechnen Sie die Randverteilung von X und den Erwartungswert $\mathbb{E}X$. Für welche c gilt $\mathbb{E}X = 1$?
Lösung:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = c) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}$$

Für $c = 2$ ist $\mathbb{E}X = 1$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 0, Y = 2)$.
Lösung:

$$\mathbb{P}(X > 0, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = c, Y = 2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y = 2|X > 0)$.
Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 2|X > 0) &= \frac{\mathbb{P}(X > 0, Y = 2)}{\mathbb{P}(X > 0)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = c, Y = 2)}{\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = c)} \\ &= \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

d) Es sei $c = 2$ sowie $Z := X \cdot Y$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}Z$, das zweite Moment $\mathbb{E}Z^2$ und die Varianz $V(Z)$.
Lösung:
Es sei $f(i, j) := \mathbb{P}(X = i, Y = j)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z &= \mathbb{E}[X \cdot Y] = \sum_{i,j:\, f(i,j)>0} i \cdot j \cdot f(i, j) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{6}, \\ \mathbb{E}Z^2 &= \mathbb{E}[X^2 \cdot Y^2] = \sum_{i,j:\, f(i,j)>0} i^2 \cdot j^2 \cdot f(i, j) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 16 \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{13}{6}, \\ V(Z) &= \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2 = \frac{13}{6} - \frac{35}{36} = \frac{53}{36}. \end{aligned}$$

Aufgabe A3

Es sei X eine standardnormal-verteilte Zufallsvariable, kurz $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Weiter sei $Y := 2X - 3$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$ und die Varianz $V(Y)$.
Lösung: Mit $\mathbb{E}X = 0$ und $V(X) = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y &= 2\mathbb{E}X - 3 = -3, \\ V(Y) &= 4V(X) = 4. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-3 < Y \leq 1)$.
Lösung: Mit der Definition von Y und 8.11 Satz folgt

$$\mathbb{P}(-3 < Y \leq 1) = \mathbb{P}(-3 < 2X - 3 \leq 1) = \mathbb{P}(0 < X \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(0).$$

Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion von X. Wegen $\Phi(2) = 0.9772$ und $\Phi(0) = 0.5$ (aus Tabelle A.1) folgt

$$\mathbb{P}(-3 < Y \leq 1) = 0.4772.$$

c) Bestimmen Sie das 0.975-Quantil $q_{0.975}$ der Zufallsvariablen Y.
Lösung: Die Verteilungsfunktion von Y sei mit F_Y bezeichnet. Dann ist $q_{0.975}$ die Lösung q der Gleichung

$$F_Y(q) = \Phi\left(\frac{q - (-3)}{2}\right) = 0.975.$$

Wegen $\Phi(1.96) = 0.975$ (aus Tabelle A.1) gilt also

$$\frac{q+3}{2} = 1.96$$

und damit

$$q_{0.975} = q = 2 \cdot 1.96 - 3 = 0.92. \tag{1}$$

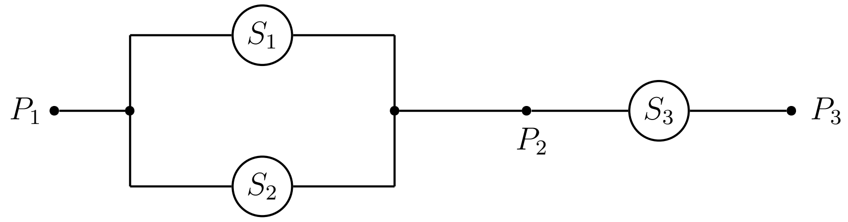
Der Zusammenhang (1) kann auch direkt aus Bemerkung 12.20 c) abgelesen werden.

d) Es sei $Z := 2X$. Bestimmen Sie die Kovarianz $C(Y, Z)$.
Lösung: Wegen $\mathbb{E}X = 0$ und $\mathbb{E}X^2 \ (= V(X) + (\mathbb{E}X)^2) \ = 1$ gilt

$$\begin{aligned} C(Y,Z) &= \mathbb{E}[Y \cdot Z] - \mathbb{E}Y \cdot \mathbb{E}Z = \mathbb{E}[(2X-3) \cdot 2X] - (-3) \cdot 0 = \mathbb{E}[4X^2 - 6X] \\ &= 4\mathbb{E}X^2 - 6\mathbb{E}X = 4. \end{aligned}$$

Aufgabe A4

Zwischen 3 Punkten P_1, P_2 und P_3 verläuft folgendes Leitungsnetz:



Dabei sind S_1, S_2, S_3 störanfällige Stellen. Die Zufallsvariablen X_i seien definiert als

$$X_i = \begin{cases} 0, & S_i \text{ ist unterbrochen,} \\ 1, & S_i \text{ ist nicht unterbrochen,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ferner seien X_1, X_2, X_3 stochastisch unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $i = 1, 2, 3$, für ein $0 < p < 1$.

a) Stellen Sie das Ereignis $A := \{$„P_1 ist mit P_2 verbunden“$\}$ mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 dar.
Lösung:

$$A \;=\; \{X_1 = 1\} \cup \{X_2 = 1\} \;=\; \{\max\{X_1, X_2\} = 1\} \;=\; \{X_1 + X_2 \geq 1\}$$

b) Stellen Sie das Ereignis $B := \{$„P_1 ist mit P_3 verbunden“$\}$ mit Hilfe des Ereignisses A und der Zufallsvariablen X_3 dar.
Lösung: $B \;=\; A \cap \{X_3 = 1\}$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B)$.
Lösung: Zunächst erhält man mit dem Additionssatz und der Unabhängigkeit von X_1 und X_2

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cup \{X_2 = 1\}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1) - \mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) \\ &= p + p - \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) \;=\; 2p - p^2 \;=\; (2 - p)p. \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit von A und $\{X_3 = 1\}$ (Blockungslemma) gilt

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1) \;=\; (2 - p)p \cdot p \;=\; (2 - p)p^2.$$

d) Die Zufallsvariable $Y := X_1 + X_2$ besitzt die Binomial-Verteilung $Bin(n, q)$. Bestimmen Sie die Parameter n und q.
Lösung: Die Zufallsvariable Y ist die Faltung zweier $Bin(1, p)$-verteilten Zufallsvariablen. Mit Tabelle S.114 erhält man damit $n = 2$ und $q = p$.

e) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $g_Y(s)$, $|s| \leq 1$, von Y.
Lösung: Nach 13.1 Definition gilt

$$\begin{aligned} g_{X_1}(s) &= \sum_{k=0}^{1} \mathbb{P}(X_1 = k)s^k \;=\; \mathbb{P}(X_1 = 0)s^0 + \mathbb{P}(X_1 = 1)s^1 \\ &= (1-p) + p \cdot s \end{aligned}$$

für $|s| \leq 1$. Weiter ist $g_{X_1} = g_{X_2}$. Nach 13.3c) folgt

$$g_Y(s) \;=\; g_{X_1}(s) \cdot g_{X_2}(s) \;=\; ((1-p) + p \cdot s)^2$$

für $|s| \leq 1$.
Da $Y \sim Bin(2, p)$ ist, siehe auch 13.2 Beispiel a).

Aufgabe A5

Ein Merkmal habe die Dichte

$$t \mapsto f_\vartheta(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, t} \exp\left(-\dfrac{(\log(t) - \vartheta)^2}{2}\right) &, \quad \text{falls } t > 0, \\ 0 &, \quad \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter ist. Der Parameter ϑ soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ sind. Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n)$ für ϑ ist von der Form

$$\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} \log(c_2 \cdot x_j - c_3)$$

mit gewissen Konstanten c_1, c_2, c_3. Bestimmen Sie die Konstanten c_1, c_2 und c_3.
Lösung: Es ist

$$\log(f_\vartheta(t)) \;=\; -\log(\sqrt{2\pi}) - \log(t) - \frac{(\log(t) - \vartheta)^2}{2}, \quad t > 0,$$

also

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{j=1}^{n} \log(f_\vartheta(x_j)) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left(-\log(\sqrt{2\pi}) - \log(x_j) - \frac{(\log(x_j) - \vartheta)^2}{2}\right) \\ &= -n \log(\sqrt{2\pi}) - \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(\log(x_j) - \vartheta)^2}{2}, \\ M_x'(\vartheta) &= \sum_{j=1}^{n} (\log(x_j) - \vartheta) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) - n\vartheta, \\ M_x''(\vartheta) &= -n < 0. \end{aligned}$$

Wegen

$$M_x'(\vartheta) \;=\; 0 \Longleftrightarrow \vartheta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log(x_j)$$

ist

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \hat{\vartheta}(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log(x_j)$$

der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ.

Aufgabe A6

Eine Münze mit den Symbolen „Zahl“ und „Wappen“ soll auf ihre Echtheit überprüft werden, d.h es soll überprüft werden ob,

$$\mathbb{P}(\{\text{„Zahl“ geworfen}\}) \;=\; \mathbb{P}(\{\text{„Wappen“ geworfen}\}) \;=\; \frac{1}{2}$$

gilt. Dem folgenden Zufallsexperiment werden die Zufallsvariablen

$$X_i \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls „Zahl“ geworfen,} \\ 0, & \text{falls „Wappen“ geworfen,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,$$

zugrunde gelegt. Dabei seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig und jeweils $Bin(1, \vartheta)$-verteilt. Der Parameter $0 < \vartheta < 1$ sei unbekannt. Nun wird die Münze $n = 1000$ Mal geworfen und 513 Mal das Symbol „Zahl“ beobachtet.

a) Bestimmen Sie das Stichproben-Mittel $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Lösung: Mit $\sum_{i=1}^{n} X_i = 513$ erhält man $\bar{X}_n = \frac{513}{1000} = 0.513$.

b) Ein asymptotisches Konfidenzintervall $\mathcal{C} = [l_n^*, L_n^*]$ für ϑ zum (Konfidenz-)Niveau $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, ist durch

$$\begin{aligned} l_n^* \;&=\; l_n^*(X_1, \dots, X_n) \;=\; \bar{X}_n \; \boxed{} \; \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}\;, \\ L_n^* \;&=\; L_n^*(X_1, \dots, X_n) \;=\; \bar{X}_n \; \boxed{} \; \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)} \end{aligned}$$

gegeben, wobei $h = \boxed{}$ ist. Vervollständigen Sie die fehlenden Angaben in den Formel für l_n^*, L_n^* und h. Berechnen Sie $\mathcal{C}$ für $\alpha = 0.05$.

Lösung: Mit 18.10 Beispiel und 18.11 Bemerkung 1. folgt

$$\begin{aligned} l_n^* \;&=\; l_n^*(X_1, \dots, X_n) \;=\; \bar{X}_n - \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}\;, \\ L_n^* \;&=\; L_n^*(X_1, \dots, X_n) \;=\; \bar{X}_n + \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}\;, \end{aligned}$$

wobei $h = u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ ist. Für $\alpha = 0.05$ ist $h = u_{0.975} = 1.96$ (aus Tabelle A.1). Mit $n = 1000$ und $\bar{X}_n = 0.513$ erhält man $l_n^* = 0.482$ und $L_n^* = 0.544$.