

B

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Klausur zum Fach GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND STATISTIK

(zum Erwerb eines Übungsscheines)

Datum: 3. März 2009

Dauer: 120 Minuten

Achtung:

Bei dieser Klausur werden **nur** diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die vorgesehenen Kästchen auf dem extra ausgegebenen

Lösungsblatt Version B

eingetragen sind! Die Herleitung wird **nicht** bewertet! **Überprüfen Sie die Version Ihres Lösungsblattes!**

Die Aufgabenblätter werden nicht abgegeben und korrigiert!

Aufgabe B1 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{11}, y_{11})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_j	-2.8	-1.6	-0.7	0.4	1.4	1.8	3.5	3.8	5.1	6.1	6.7
y_j	10	5.4	4.5	5.9	2.4	5.4	1.9	5.6	-1.7	0.3	-4.9

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel \bar{x} , \bar{y} , die Stichproben-Standardabweichungen s_x , s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} .

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{11} x_j = 23.7, \quad \sum_{j=1}^{11} x_j^2 = 151.05, \quad \sum_{j=1}^{11} y_j = 34.8, \quad \sum_{j=1}^{11} y_j^2 = 281.1, \quad \sum_{j=1}^{11} x_j \cdot y_j = -36.09.$$

$\bar{x} =$	<input type="text"/>	$\bar{y} =$	<input type="text"/>
$s_x =$	<input type="text"/>	$s_y =$	<input type="text"/>
$r_{xy} =$	<input type="text"/>		

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x .

$a^* =$	<input type="text"/>	$b^* =$	<input type="text"/>
---------	----------------------	---------	----------------------

- c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.2}$ von (y_1, \dots, y_{11}) .

$$\bar{y}_{0.2} = \input{text}$$

- d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.2-Quantil $\tilde{y}_{0.2}$ von (y_1, \dots, y_{11}) .

$$\tilde{y}_{0.2} = \input{text}$$

- e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von (y_1, \dots, y_{11}) .

$$\text{Quartilsabstand} = \input{text}$$

Aufgabe B2 (10 Punkte)

Ein LKW wird insgesamt n -mal durch einen Kran mit Kies beladen. Bei jedem Beladungsvorgang i erfasst der Kran unabhängig von den anderen Beladungsvorgängen eine zufällige Masse X_i an Kies, die normalverteilt ist mit Mittelwert $\mu = 300$ (in kg) und Varianz $\sigma^2 = 4000$ (in kg^2), wobei $i = 1, \dots, n$.

- a) Welche Verteilung besitzt S_n , die zufällige Gesamtmasse an Kies bei n unabhängigen Beladungsvorgängen?

$$S_n \sim \boxed{\phantom{\text{Normalverteilung}}}$$

- b) Der LKW selbst hat eine Masse von 5000 kg. Welche Verteilung besitzt G_n , die Masse des LKW's inklusive der Beladung nach n unabhängigen Beladungsvorgängen?

$$G_n \sim \boxed{\phantom{\text{Normalverteilung}}}$$

- c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}G_n$ und die Varianz $V(G_n)$.

$$\mathbb{E}G_n = \boxed{}, \quad V(G_n) = \boxed{}$$

- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtmasse S_{25} mindestens 7200 kg beträgt, wenn der LKW mit $n = 25$ Kranfüllungen beladen wird.

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \boxed{}$$

- e) Wie groß muss n mindestens sein, damit $\mathbb{P}(S_n \geq 6000) \geq 0.99$ gilt?

$$n \text{ muss mindestens } \boxed{} \text{ groß sein.}$$

Hinweis:

n	$\frac{15n-300}{\sqrt{10n}}$
20	0.00
21	1.04
22	2.02
23	2.97

Aufgabe B3 (10 Punkte)

Eine Urne enthalte 10 gleichgroße Kugeln in den Farben rot und blau, die 20 g oder 50 g wiegen, entsprechend den Anzahlen:

	rot	blau
20 g	3	2
50 g	4	1

Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten

- a) p_1 , dass eine „rein zufällig“ herausgezogene Kugel rot ist,

$$p_1 = \boxed{}$$

- b) p_2 , dass eine „rein zufällig“ herausgezogene Kugel blau ist und 50 g wiegt,

$$p_2 = \boxed{}$$

- c) p_3 , dass eine „rein zufällig“ herausgezogene Kugel 50 g wiegt.

$$p_3 = \boxed{}$$

- d) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit p_4 , dass eine „rein zufällig“ herausgezogene Kugel rot ist, wenn bekannt ist, dass sie 50 g wiegt.

$$p_4 = \boxed{}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_5 bzw. p_6 dafür, dass bei „rein zufälliger“ aufeinanderfolgender Entnahme von Kugeln zuerst eine blaue zu 50 g, dann eine beliebig schwere rote, dann eine beliebig schwere blaue und zuletzt eine blaue Kugel zu 50 g gezogen wird, wenn die entnommenen Kugeln

- e) jeweils vor der nächsten Ziehung wieder zurückgelegt werden,

$$p_5 = \boxed{}$$

- f) nicht wieder zurückgelegt werden?

$$p_6 = \boxed{}$$

Hinweis: Die auftretenden Brüche brauchen nicht ausgerechnet zu werden.

Aufgabe B4 (10 Punkte)

Ein Autohändler verkauft je Tag X Autos des Typs **1** und Y Autos des Typs **2**. Die Tabelle zeigt die gemeinsame Zähldichte $f_{X,Y}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ von X und Y für $i, j = 0, 1, 2$.

		j		
		0	1	2
i	0	0.1	0.1	0.0
	1	0.1	0.3	0.2
	2	0.0	0.1	0.1

Es ist also z.B. $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = f_{X,Y}(1, 2) = 0.2$.

- a) Bestimmen Sie die Zähldichten f_X von X und f_Y von Y .
- b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 1 \mid Y = 1)$.
- c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- d) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ und die Varianzen $V(X)$ und $V(Y)$.
- e) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$ von X und Y .

Aufgabe B5 (10 Punkte)

Ein Merkmal habe die Dichte der Erlang-Verteilung $E(4, 1/\vartheta)$

$$t \rightarrow f_\vartheta(t) := \frac{t^3}{6\vartheta^4} \cdot e^{-t/\vartheta}, \quad t > 0,$$

wobei $\vartheta \in \Theta := (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist. ϑ soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ vorausgesetzt wird.

- a) Bestimmen Sie die Loglikelihood-Funktion zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$ für ϑ .
- c) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{\vartheta}(X) = \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ bei Vorliegen von ϑ für den Fall, dass die unabhängigen Stichprobenvariablen X_1, \dots, X_n die Erlang-Verteilung $E(4, 1/\vartheta)$ besitzen.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst $\mathbb{E}_\vartheta(X_j)$ für $j = 1, \dots, n$.

- d) Welche der drei folgenden Eigenschaften sind für den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$ erfüllt?
 - d₁) $\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$ ist erwartungstreu für ϑ .
 - d₂) Die Schätzfolge $(\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist asymptotisch erwartungstreu für ϑ .
 - d₃) Die Schätzfolge $(\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist konsistent für ϑ .