

# B

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

**Klausur zum Fach**  
**GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE**  
**UND STATISTIK**  
**für Studierende der INFORMATIK**  
(zum Erwerb eines Übungsscheines)

Datum: 26. Februar 2004

Dauer: 120 Minuten

**Achtung:**

Bei dieser Klausur werden **nur** diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die vorgesehenen Kästchen auf dem extra ausgegebenen

## **Lösungsblatt Version B**

eingetragen sind! Die Herleitung wird **nicht** bewertet! **Überprüfen Sie die Version Ihres Lösungsblattes!**

Die Aufgabenblätter werden nicht abgegeben und korrigiert!

**Aufgabe B1** (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_j$	1.1	1.6	2.9	3.9	5.2	6.1	7.1	7.6	8.9	9.8
$y_j$	14.2	14.3	1.2	7.4	5.6	3.9	-0.9	1	-8.9	-7.5

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , die Stichproben-Standardabweichungen  $s_x$ ,  $s_y$  und den empirischen Korrelationskoeffizienten  $r_{xy}$ .

**Hinweis:**

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 54.2, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 375.06, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j = 30.3, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j^2 = 646.17, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \cdot y_j = -27.75.$$

$\bar{x} =$	<input type="text"/>	$\bar{y} =$	<input type="text"/>	
$s_x =$	<input type="text"/>	$s_y =$	<input type="text"/>	$r_{xy} =$ <input type="text"/>

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade  $y = a^* + b^* \cdot x$  von  $y$  auf  $x$ .

$a^* =$	<input type="text"/>	$b^* =$	<input type="text"/>
---------	----------------------	---------	----------------------

- c) Berechnen Sie das 0.15-getrimmte Stichprobenmittel  $\bar{y}_{0.15}$  von  $(y_1, \dots, y_{10})$ .

$\bar{y}_{0.15} =$	<input type="text"/>
--------------------	----------------------

- d) Berechnen Sie den Quartilsabstand von  $(y_1, \dots, y_{10})$ .

Quartilsabstand =	<input type="text"/>
-------------------	----------------------

**Aufgabe B2** (10 Punkte)

$X, Y$  seien zwei Zufallsvariablen mit Werten in  $\{0, 1, c\}$ ,  $c \in \{2, 3, 4, \dots\}$ , bzw.  $\{0, 1, 2\}$ . Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung  $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$  des Zufallsvektors  $(X, Y)$  für die Werte  $(i, j) \in \{0, 1, c\} \times \{0, 1, 2\}$  an.

$Y \setminus X$	$i = 0$	$i = 1$	$i = c$
$j = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$j = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$j = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

- a) Berechnen Sie die Randverteilung von  $X$  und den Erwartungswert  $\mathbb{E}X$ . Für welche  $c$  gilt  $\mathbb{E}X = \frac{5}{4}$ ?

$i$	0	1	$c$
$\mathbb{P}(X = i)$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

 $\mathbb{E}X =$    $c =$

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(X > 0, Y = 1)$ .

$$\mathbb{P}(X > 0, Y = 1) =$$

- c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(Y = 1 | X > 0)$ .

$$\mathbb{P}(Y = 1 | X > 0) =$$

- d) Es sei  $c = 3$  sowie  $Z := X \cdot Y$ . Berechnen Sie den Erwartungswert  $\mathbb{E}Z$ , das zweite Moment  $\mathbb{E}Z^2$  und die Varianz  $V(Z)$ .

$$\mathbb{E}Z =$$
   $\mathbb{E}Z^2 =$    $V(Z) =$

**Aufgabe B3** (10 Punkte)

Es sei  $X$  eine standardnormal-verteilte Zufallsvariable, kurz  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Weiter sei  $Y := 3X - 1$ .

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert  $\mathbb{E}Y$  und die Varianz  $V(Y)$ .

$$\mathbb{E}Y = \boxed{\phantom{000000}} \quad V(Y) = \boxed{\phantom{000000}}$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(-1 < Y \leq 2)$ .

$$\mathbb{P}(-1 < Y \leq 2) = \boxed{\phantom{000000}}$$

c) Bestimmen Sie das 0.975-Quantil  $q_{0.975}$  der Zufallsvariablen  $Y$ .

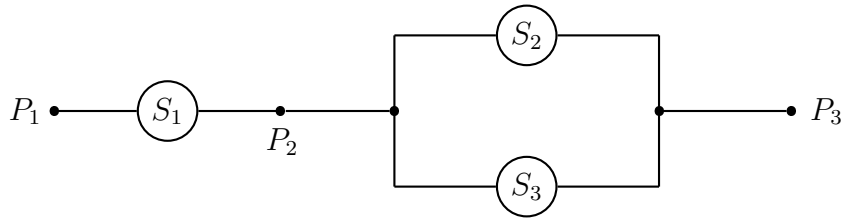
$$q_{0.975} = \boxed{\phantom{000000}}$$

d) Bestimmen Sie die Kovarianz  $C(X, Y)$ .

$$C(X, Y) = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Aufgabe B4** (10 Punkte)

Zwischen 3 Punkten  $P_1, P_2$  und  $P_3$  verläuft folgendes Leitungsnetz:



Dabei sind  $S_1, S_2, S_3$  störanfällige Stellen. Die Zufallsvariablen  $X_i$  seien definiert als

$$X_i = \begin{cases} 0, & S_i \text{ ist unterbrochen,} \\ 1, & S_i \text{ ist nicht unterbrochen,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ferner seien  $X_1, X_2, X_3$  stochastisch unabhängig mit  $\mathbb{P}(X_i = 1) = p, i = 1, 2, 3$ , für ein  $0 < p < 1$ .

- a) Stellen Sie das Ereignis  $A := \{„P_2 \text{ ist mit } P_3 \text{ verbunden“}\}$  mit Hilfe der Zufallsvariablen  $X_2$  und  $X_3$  dar.

$$A = \left\{ X_2 = \boxed{\phantom{0}} \right\} \cap \left\{ X_3 = \boxed{\phantom{0}} \right\}$$

- b) Stellen Sie das Ereignis  $B := \{„P_1 \text{ ist mit } P_3 \text{ verbunden“}\}$  mit Hilfe der Zufallsvariablen  $X_1$  und des Ereignisses  $A$  dar.

$$B = \left\{ X_1 = \boxed{\phantom{0}} \right\} \cap A$$

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(B)$ .

$$\mathbb{P}(B) = \boxed{\phantom{0}}$$

- d) Die Zufallsvariable  $Y := X_1 + X_2$  besitzt die Binomial-Verteilung  $Bin(n, q)$ . Bestimmen Sie die Parameter  $n$  und  $q$ .

$$n = \boxed{\phantom{0}} \quad q = \boxed{\phantom{0}}$$

- e) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion  $g_Y(s), |s| \leq 1$ , von  $Y$ .

$$g_Y(s) = \boxed{\phantom{0}}, \quad |s| \leq 1.$$

**Aufgabe B5** (6 Punkte)

Ein Merkmal habe die Dichte

$$t \mapsto f_{\vartheta}(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi} t} \exp(-(\log(t) - \vartheta)^2), & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

wobei  $\vartheta \in \mathbb{R}$  ein unbekannter Parameter ist. Der Parameter  $\vartheta$  soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  geschätzt werden, wobei  $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$  sind. Der Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$  für  $\vartheta$  ist von der Form

$$\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = c_1 \cdot \sum_{j=1}^n \log(c_2 \cdot x_j - c_3)$$

mit gewissen Konstanten  $c_1, c_2, c_3$ . Bestimmen Sie die Konstanten  $c_1, c_2$  und  $c_3$ .

$$c_1 = \boxed{\phantom{000000}} \quad c_2 = \boxed{\phantom{000000}} \quad c_3 = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Aufgabe B6** (4 Punkte)

Eine Münze mit den Symbolen „Zahl“ und „Wappen“ soll auf ihre Echtheit überprüft werden, d.h es soll überprüft werden ob,

$$\mathbb{P}(\{\text{„Zahl“ geworfen}\}) = \mathbb{P}(\{\text{„Wappen“ geworfen}\}) = \frac{1}{2}$$

gilt. Dem folgenden Zufallsexperiment werden die Zufallsvariablen

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls „Zahl“ geworfen,} \\ 0, & \text{falls „Wappen“ geworfen,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

zugrunde gelegt. Dabei seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  stochastisch unabhängig und jeweils  $Bin(1, \vartheta)$ -verteilt. Der Parameter  $0 < \vartheta < 1$  sei unbekannt. Nun wird die Münze  $n = 1000$  Mal geworfen und 487 Mal das Symbol „Zahl“ beobachtet.

- a) Bestimmen Sie das Stichproben-Mittel  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

$$\bar{X}_n = \boxed{\phantom{0.487}}$$

- b) Ein asymptotisches Konfidenzintervall  $\mathcal{C} = [l_n^*, L_n^*]$  für  $\vartheta$  zum (Konfidenz-)Niveau  $1 - \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , ist durch

$$l_n^* = l_n^*(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n \boxed{\phantom{0.95}} \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)},$$
$$L_n^* = L_n^*(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n \boxed{\phantom{0.95}} \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}$$

gegeben, wobei  $h = \boxed{\phantom{1.96}}$  ist. Vervollständigen Sie die fehlenden Angaben in den Formel für  $l_n^*, L_n^*$  und  $h$ . Berechnen Sie  $\mathcal{C}$  für  $\alpha = 0.05$ .

$$l_n^* = \boxed{\phantom{0.487}} \quad L_n^* = \boxed{\phantom{0.487}}$$