

INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK  
UNIVERSITÄT KARLSRUHE  
Dr. M. Folkers  
Priv. Doz. Dr. D. Kadelka

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

**Klausur zum Fach**  
**GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE**  
**UND STATISTIK**  
**für Studierende der INFORMATIK**  
(zum Erwerb eines Übungsscheines)

Datum: 26. Juli 2005

Dauer: 120 Minuten

**Achtung:**

Bei dieser Klausur werden **nur** diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die vorgesehenen Kästchen auf dem extra ausgegebenen Lösungsblatt eingetragen sind! Die Herleitung wird **nicht** bewertet!

Die Aufgabenblätter werden nicht abgegeben und korrigiert!

**Aufgabe 1** (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_j$	-2.2	-0.9	0	0.8	2.1	3.5	4.3	5	5.7	7
$y_j$	8.9	8.2	4.9	3.3	2	0.7	1	-2.6	-1.5	-1.8

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , die Stichproben-Standardabweichungen  $s_x$ ,  $s_y$  und den empirischen Korrelationskoeffizienten  $r_{xy}$ .

**Hinweis:**

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 25.3, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 147.93, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j = 23.1, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j^2 = 199.09, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \cdot y_j = -47.52.$$

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade  $y = a^* + b^* \cdot x$  von  $y$  auf  $x$ .
- c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel  $\bar{y}_{0.2}$  von  $(y_1, \dots, y_{10})$ .
- d) Berechnen Sie den Quartilsabstand von  $(y_1, \dots, y_{10})$ .

**Aufgabe 2** (10 Punkte)

Die gemeinsame Zähl-dichte  $f_{X,Y}(i, j)$  zweier Zufallszahlen  $X$  und  $Y$  ist in der folgenden Tabelle gegeben. So erhält man z.B. aus der Tabelle  $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = f_{X,Y}(0, 1) = 0$ , wenn man dort  $i = 0$  und  $j = 1$  setzt.

$i$	-2	-1	0	1
$j$				
0	0.05	0.05	0.05	0.05
1	0.05	0.10	0	0.05
2	0.05	0.10	0.05	0.05
3	0.15	0.15	0.05	0

- a) Bestimmen Sie die Zähl-dichte  $f_Y$  von  $Y$ .

$j$	0	1	2	3
$f_Y(j)$				

- b) Berechnen Sie  $\mathbb{E}Y$  und  $\mathbb{E}Y^2$ .

$$\mathbb{E}Y = \boxed{\phantom{000}} \quad \mathbb{E}Y^2 = \boxed{\phantom{000}}$$

- c) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(X = i | Y = 1)$  von  $X$  unter der Bedingung  $Y = 1$  für  $i = -2, \dots, 1$ .

$i$	-2	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = i   Y = 1)$				

- d) Berechnen Sie  $\mathbb{P}(X \leq 0 | Y = 1)$ .

$$\mathbb{P}(X \leq 0 | Y = 1) = \boxed{\phantom{000}}$$

- e) Bestimmen Sie  $\mathbb{P}(X + Y = 2)$ .

$$\mathbb{P}(X + Y = 2) = \boxed{\phantom{000}}$$

**Aufgabe 3** (10 Punkte)

$X$  sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 3 und der Varianz 4 und  $Y$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 6 und der Varianz 9. Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  seien stochastisch unabhängig.

- a) Bestimmen Sie  $\mathbb{P}(Y \leq 12)$ .

$$\mathbb{P}(Y \leq 12) = \boxed{\phantom{0.0000}}$$

- b) Bestimmen Sie das 0.95-Quantil  $q_{0.95}$  der Zufallsvariablen  $Y$ .

$$q_{0.95} = \boxed{\phantom{0.0000}}$$

- c) Es seien die Zufallsvariablen  $W := aX + Y$  und  $Z := X - aY$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  gegeben. Berechnen Sie die Varianzen  $V(W)$  und  $V(Z)$  in Abhängigkeit von  $a$ .

**Hinweis:** Nach Aufgabenstellung ist  $V(X)=4$  und  $V(Y)=9$ .

$$V(W) = \boxed{\phantom{0.0000}} \quad V(Z) = \boxed{\phantom{0.0000}}$$

- d) Berechnen Sie die Kovarianz  $C(W, Z)$  und den Korrelationskoeffizienten  $\rho(W, Z)$  der Zufallsvariablen  $W$  und  $Z$  in Abhängigkeit von  $a$ .

$$C(W, Z) = \boxed{\phantom{0.0000}} \quad \rho(W, Z) = \boxed{\phantom{0.0000}}$$

- e) Für welche  $a$  sind  $W$  und  $Z$  unkorreliert?

$$a = \boxed{\phantom{0.0000}}$$

**Aufgabe 4** (10 Punkte)

Ein Gerät bestehe aus 5 gleichartigen Komponenten  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ . Die zufälligen Lebensdauern  $X_1, \dots, X_5$  der einzelnen Komponenten seien unabhängig und  $\mathcal{U}(0, 5)$ -verteilt, die Gleichverteilung auf  $(0, 5)$ . Sei  $0 \leq t \leq 5$  fest.

- a) Bestimmen Sie für  $0 < t < 5$  die Wahrscheinlichkeit  $p_t$ , dass Komponente  $K_1$  zum Zeitpunkt  $t$  bereits ausgefallen ist.

$$p_t = \boxed{\phantom{0}}$$

- b) Es sei  $Y_t$  die zufällige Anzahl der Komponenten, die zum Zeitpunkt  $t$  bereits ausgefallen sind. Welche Verteilung besitzt  $Y_t$ ? Geben Sie die Parameter dieser Verteilung an!

$$Y_t \sim \boxed{\phantom{0}}$$

- c) Das Gerät ist intakt, solange höchstens zwei Komponenten ausgefallen sind.

- c<sub>1</sub>) Drücken Sie das Ereignis  $A_t :=$  „Das Gerät ist zum Zeitpunkt  $t$  intakt“ mit Hilfe von  $Y_t$  aus.

$$A_t = \left\{ Y_t \leq 2 \right\}$$

- c<sub>2</sub>) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A_t)$ , dass das Gerät zum Zeitpunkt  $t$  noch intakt ist?

$$\mathbb{P}(A_t) = \boxed{\phantom{0}}$$

- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A_3)$  (auf 3 Nachkommastellen genau), dass das Gerät zum Zeitpunkt  $t = 3$  intakt ist.

$$\mathbb{P}(A_3) = \boxed{\phantom{0}}$$



**Aufgabe 6** (3 Punkte)

Eine Firma besitzt 17 gleichartige Computer, welche unabhängig voneinander und unter gleichen Bedingungen 4 Jahre eingesetzt worden waren. Dabei waren 12 dieser Computer während der vier Jahre ohne Reparatur einsatzfähig, während die übrigen Computer mindestens einmal ausfielen.

Es sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computer dieser Bauart 4 Jahre ohne Reparatur einsatzfähig ist. Geben Sie ein (zweiseitiges) Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für die Wahrscheinlichkeit  $p$  an.

Untere Konfindenzschränke =

Obere Konfindenzschränke =