INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Priv. Doz. Dr. D. Kadelka

A

Name:

Vorname:

Matr.–Nr.:

Klausur zum Fach

GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND STATISTIK

für Studierende der INFORMATIK

(zum Erwerb eines Übungsscheines)

Datum:	**15. September 2004**
Dauer:	**120 Minuten**

Achtung:

Bei dieser Klausur werden **nur** diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die vorgesehenen Kästchen auf dem extra ausgegebenen

Lösungsblatt Version A

eingetragen sind! Die Herleitung wird **nicht** bewertet! **Überprüfen Sie die Version Ihres Lösungsblattes!**

Die Aufgabenblätter werden nicht abgegeben und korrigiert!

Aufgabe A1 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{10}, y_{10})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	1	1.8	3.1	3.9	4.7	6.4	7	8.1	8.9	9.7
y_j	6.8	6.9	5.8	4.8	3.9	3.9	1.2	−2	−1	−3.5

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.
Hinweis:
$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 54.6 \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 380.02, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j = 26.8, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j^2 = 199.64, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \cdot y_j = 48.56.$$

$\bar{x} =$ ☐ $\bar{y} =$ ☐

$s_x =$ ☐ $s_y =$ ☐

$r_{xy} =$ ☐

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.

$a^* =$ ☐ $b^* =$ ☐

c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.2}$ von $(y_1, \ldots, y_{10})$.

$\bar{y}_{0.2} =$ ☐

d) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \ldots, y_{10})$.

Quartilsabstand $=$ ☐

Aufgabe A2 (7 Punkte)

In einem Rohr soll Wasser nur in einer Richtung fließen. Dazu baut man hintereinander in das Rohr zwei Ventile ein, die das Wasser jeweils nur in ein und derselben Richtung durchlassen sollen. Ventil 1 bzw. 2 ist zu einem bestimmten Zeitpunkt im Zustand

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right\}, \text{ falls es das Wasser nur in } \left\{\begin{array}{c} \text{der gewünschten Richtung} \\ \text{beide Richtungen} \\ \text{keiner Richtung} \end{array}\right\} \text{ durchlässt.}$$

Sei X der zufällige Zustand des ersten, Y der des zweiten Ventils. Es ist also

$$\begin{aligned} A &:= \text{„Die Ventilkombination funktioniert richtig“} \\ &= [X = 0, Y = 0] + [X = 0, Y = 1] + [X = 1, Y = 0] = [X + Y \leq 1]. \end{aligned}$$

Es seien X und Y unabhängig mit

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0.9 \text{ und } \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0.09.$$

a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y = 2)$ und $\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 0)$.

$\mathbb{P}(Y = 2) =$ $\boxed{}$ $\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 0) =$ $\boxed{}$

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0)$.

$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) =$ $\boxed{}$

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X + Y = 0)$, $\mathbb{P}(X + Y = 1)$ und $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.

$\mathbb{P}(X + Y = 0) =$ $\boxed{}$ $\mathbb{P}(X + Y = 1) =$ $\boxed{}$

$\mathbb{P}(X + Y \leq 1) =$ $\boxed{}$

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ventilkombination nicht richtig funktioniert.

Wahrscheinlichkeit $=$ $\boxed{}$

Aufgabe A3 (10 Punkte)

Ein Transformatorkern habe die zufällige Dicke X (in mm) und eine Spule den zufällige Innendurchmesser Y. X und Y seien stochastisch unabhängige Zufallsvariable mit den Normalverteilungen $\mathcal{N}(22, 0.18)$ bzw. $\mathcal{N}(23, 0.07)$.

a) Welche Verteilung besitzt $Z := Y - X$?

$$Z \sim \boxed{}$$

b) Berechnen Sie die Kovarianz $C(Z, Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(Z, Y)$ von Z und Y.

$$C(Z, Y) = \boxed{} \qquad \rho(Z, Y) = \boxed{}$$

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Z > 0)$, dass ein zufällig ausgewählter Kern in eine zufällig ausgewählte Spule passt.

$$\mathbb{P}(Z > 0) = \boxed{}$$

d) Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{P}(X > t) = 0.025$ gilt.

$$t = \boxed{}$$

Aufgabe A4 (8 Punkte)

Eine Zufallsvariable X habe die Verteilung $Exp(\lambda)$ mit dem Parameter $\lambda > 0$ und es sei $Y = \dfrac{X}{1+X}$ mit festem Parameter $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie den Median von X für den Spezialfall $\lambda = \ln(2)$.

$$\text{Median} = \boxed{}$$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}\dfrac{Y^2}{(1-Y)^2}$.

<u>Hinweis:</u> $\dfrac{Y^2}{(1-Y)^2}$ ist eine einfache Funktion der Zufallsvariablen X.

$$\mathbb{E}\frac{Y^2}{(1-Y)^2} = \boxed{}$$

c) Y besitzt die stetige Verteilungsfunktion

$$t \to F_Y(t) := \begin{cases} 0 & , t \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda t}{1-t}} & , 0 < t < 1 \\ 1 & , t \ge 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Dichte f_Y von Y.

$$t \to f_Y(y) := \begin{cases} \boxed{} & , \boxed{} < y < \boxed{} \\ \boxed{} & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe A5 (7 Punkte)

Ein Merkmal besitze die Weibull-Verteilung $W_{\vartheta,\beta}$. Es besitzt also die Dichte

$$f_\vartheta(x) := \begin{cases} \vartheta \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-\vartheta \cdot x^\beta} & , x > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

mit einem bekannten Parameter $\beta > 0$ und einem unbekannten Parameter $\vartheta > 0$. Beobachtet sei die feste Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

a) Bestimmen Sie die Loglikelihood-Funktion zu x.

$M_x(\vartheta) =$ $\boxed{}$

b) Berechnen Sie die Ableitung $M_x'(\vartheta)$.

$M_x'(\vartheta) =$ $\boxed{}$

c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ.

$\hat{\vartheta}(x) =$ $\boxed{}$

d) Bekannt ist, dass für eine Zufallsvariable Y mit Weibull-Verteilung $W_{\vartheta,\beta}$ die Zufallsvariable Y^β die Verteilung $Exp(\vartheta)$ besitzt (kein Beweis erforderlich).
Seien $X_1, \ldots, X_n$ die stochastisch unabhängig Stichprobenvariablen. Welche Verteilung besitzt $Z := \sum_{i=1}^n X_i^\beta$?

$Z \sim$ $\boxed{}$

Aufgabe A6 (8 Punkte)

Zwei Firmen erhalten Lieferungen gleichartiger Messinstrumente, von denen viele wegen Messfehlern noch nachjustiert werden müssen. Angenommen sei, dass sich die Messinstrumente nicht gegenseitig beeinflussen.

a) Von den $n = 18$ an die erste Firma gelieferten Messinstrumenten mussten 12 nachjustiert werden. Geben Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für die Wahrscheinlichkeit p an, dass ein Messinstrument nachjustiert werden muss.

untere Konfidenzschranke $l(x) =$ $\boxed{}$

obere Konfidenzschranke $L(x) =$ $\boxed{}$

b) Die zweite Firma erhält eine Lieferung von $N = 1000$ Messinstrumenten eines anderen Typs. Von den gelieferten Instrumenten werden 160 überprüft; dabei stellt sich heraus, dass 120 der überprüften Instrumente nachjustiert werden müssen. Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für den Anteil der Instrumenten in der gesamten Lieferung, die nachjustiert werden müssen.

untere Konfidenzschranke $l'(x) =$ $\boxed{}$

obere Konfidenzschranke $L'(x) =$ $\boxed{}$