Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Rechnerentwurf und Fehlertoleranz

Technische Informatik I im WS 2004/2005

Musterlösungen zum 2. Übungsblatt

Dr.-Ing. Tamim Asfour
Haid-und-Neu-Str. 7
2. OG., Raum 313.1
D-76131 Karlsruhe

Telefon: +49-721-608-7379
Fax: +49-721-608-8270
Email: asfour@ira.uka.de
http://i61www.ira.uka.de/users/asfour/TI

Lösung 1

1. BCD: 98000003
2. Vorzeichenlose Dualzahl: $2^{31} + 2^{28} + 2^{27} + 2^{1} + 2^{0}$
3. Dualzahl ind Einerkomplement-Form:
$$-(2^{31} - 1) + 2^{28} + +2^{27} + 2^{1} + 2^{0} \;=\; -1744830460_{10}$$
4. Dualzahl ind Zweierkomplement-Form:
$$-(2^{31}) + 2^{28} + +2^{27} + 2^{1} + 2^{0} \;=\; -1744830461_{10}$$
5. Gleitkomma-Zahl im IEEE-754-Standard in einfacher Genauigkeit:
$$\begin{aligned} VZ &= 1 \\ Char &= 00110000 \;=\; 48 \\ Exp &= Char - 127 \;=\; -79 \\ M &= 00000000000000000000011 \;\Rightarrow \\ Z &= (-1)^{1} \cdot (1{,}00000000000000000000011) \cdot 2^{-79} \\ &= -(1 + 2^{-22} + 2^{-23}) \cdot 2^{-79} \end{aligned}$$

Lösung 2

1. $a\,b \vee a\,\overline{b} \overset{\{Distributivgesetz\}}{=} a(b \vee \overline{b}) \overset{\{Inverses\,Element\}}{=} a \wedge 1 \overset{\{Neutralelement\}}{=} a$
2. $(a \vee \overline{b})\,b \overset{\{Kommutativgesetz\}}{=} b\,(a \vee \overline{b}) \overset{\{Distributivgesetz\}}{=} b\,a \vee b\,\overline{b} \overset{\{Inverses\,Element\}}{=}$
$b\,a \vee 0 \overset{\{Neutralelement\}}{=} b\,a \overset{\{Kommutativgesetz\}}{=} a\,b$
3. $a\,\overline{b} \;\vee\; b \overset{\{Kommutativgesetz\}}{=} b \;\vee\; a\,\overline{b} \overset{\{Distributivgesetz\}}{=} (b \;\vee\; a)(b \;\vee\; \overline{b}) \overset{\{Inverses\,Element\}}{=}$
$(b \vee a) \wedge 1 \overset{\{Neutralelement\}}{=} (b \vee a) \overset{\{Kommutativgesetz\}}{=} (a \vee b)$
4. $(a \vee b)(a \vee \overline{b}) \overset{\{Distributivgesetz\}}{=} a \vee b\,\overline{b} \overset{\{Inverses\,Element\}}{=} a \vee 0 \overset{\{Neutralelement\}}{=} a$

Lösung 3

1. Es gilt zu beweisen, dass $(\overline{a} \wedge \overline{b})$ das Komplementelement von $(a \vee b)$ ist. Dazu müssen die Bedingungen der Komplementgesetze $(x \vee \overline{x} = 1)$ und $(x \wedge \overline{x} = 0)$ erfüllt sein.

   Mit $x = a \vee b$ gilt:

   - $(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) = (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1$
   - $(a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (a \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) = (0 \wedge \overline{b}) \vee (0 \wedge \overline{a}) = 0 \vee 0 = 0$

   Also $(\overline{a} \wedge \overline{b})$ ist das Komplementelement von $(a \vee b)$ und damit ist das DeMorgan-Gesetz: $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ bewiesen.

2. Aus den Voraussetzungen folgt

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge b) &= (a \wedge c) \vee (\overline{a} \wedge c)\\ (a \vee \overline{a}) \wedge b &= (a \vee \overline{a}) \wedge c\\ 1 \wedge b &= 1 \wedge c \qquad \Rightarrow \qquad b = c \qquad q.e.d.\end{aligned}$$

3. Setzt man

$$m = a \vee (b \vee c) \qquad \text{und} \qquad n = (a \vee b) \vee c$$

   so hat man zu beweisen, dass $m = n$ ist.

$$\begin{aligned}a \wedge m &= a \wedge (a \vee (b \vee c)) = a\\ a \wedge n &= a \wedge ((a \vee b) \vee c) = (a \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a\end{aligned}$$

   Es gilt somit

$$a \wedge m = a \wedge n \tag{1}$$

   Ferner ist

$$\begin{aligned}\overline{a} \wedge m &= \overline{a} \wedge (a \vee (b \vee c)) = (a \wedge \overline{a}) \vee (\overline{a} \wedge (b \vee c)) = 0 \vee (\overline{a} \wedge (b \vee c))\\ &= (\overline{a} \wedge (b \vee c)) = (\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c)\\ \overline{a} \wedge n &= \overline{a} \wedge ((a \vee b) \vee c) = (\overline{a} \wedge (a \vee b)) \vee (\overline{a} \wedge c) = ((\overline{a} \wedge a) \vee (\overline{a} \wedge b)) \vee (\overline{a} \wedge c)\\ &= (0 \vee (\overline{a} \wedge b)) \vee (\overline{a} \wedge c) = (\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c)\end{aligned}$$

   und somit gilt

$$\overline{a} \wedge m = \overline{a} \wedge n \tag{2}$$

   Aus (1) und (2) folgt:

$$m = n \qquad q.e.d.$$

Lösung 4

1. Zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c &= a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) \\
(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c &= (a \leftrightarrow b)c \vee (a \not\leftrightarrow b)\overline{c} \\
&= (a\,b \vee \overline{a}\,\overline{b})\,c \vee (a\,\overline{b} \vee \overline{a}\,b)\,\overline{c} \\
&= a\,b\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c \vee a\,\overline{b}\,\overline{c} \vee \overline{a}\,b\,\overline{c} \\
&= a\,(b\,c \vee \overline{b}\,\overline{c}) \vee \overline{a}\,(b\,\overline{c} \vee \overline{b}\,c) \\
&= a\,(b \leftrightarrow c) \vee \overline{a}\,(b \not\leftrightarrow c) \\
&= a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)
\end{aligned}
$$

Zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
(a \not\leftrightarrow b) \not\leftrightarrow c &= a \not\leftrightarrow (b \not\leftrightarrow c) \\
(a \not\leftrightarrow b) \not\leftrightarrow c &= (a \not\leftrightarrow b)\overline{c} \vee (a \leftrightarrow b)c \\
&= (a \leftrightarrow b)\,c \vee (a \not\leftrightarrow b)\,\overline{c} \\
&= (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c \\
&= a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) && \text{wurde bereits bewiesen!} \\
&= a\,(b \leftrightarrow c) \vee \overline{a}\,(b \not\leftrightarrow c) \\
&= a \not\leftrightarrow (b \not\leftrightarrow c)
\end{aligned}
$$

2. Zu zeigen: $(a \overline{\wedge} b) \overline{\wedge} c \neq a \overline{\wedge} (b \overline{\wedge} c)$

a	b	c	$a \overline{\wedge} b$	$b \overline{\wedge} c$	$(a \overline{\wedge} b) \overline{\wedge} c$	$a \overline{\wedge} (b \overline{\wedge} c)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	**0**	**1**
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	**0**	**1**
1	0	0	1	1	**1**	**0**
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	**1**	**0**
1	1	1	0	0	1	1

Zu zeigen: $(a \overline{\vee} b) \overline{\vee} c \neq a \overline{\vee} (b \overline{\vee} c)$

a	b	c	$a \overline{\vee} b$	$b \overline{\vee} c$	$(a \overline{\vee} b) \overline{\vee} c$	$a \overline{\vee} (b \overline{\vee} c)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	**0**	**1**
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	**0**	**1**
1	0	0	0	1	**1**	**0**
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	**1**	**0**
1	1	1	0	0	0	0

3. Die Implikationen $\rightarrow$ und $\leftarrow$ sind **nicht assoziativ.**

   Zu zeigen: $(a \rightarrow b) \rightarrow c \neq a \rightarrow (b \rightarrow c)$

a	b	c	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow c$	$(a \rightarrow b) \rightarrow c$	$a \rightarrow (b \rightarrow c)$
0	0	0	1	1	**0**	**1**
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	**0**	**1**
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

   Es gilt auch: $(a \leftarrow b) \leftarrow c \neq a \leftarrow (b \leftarrow c)$ (Beweis analog wie oben)

Lösung 5

1. Zu zeigen: $p \vee (\overline{p \wedge q}) = 1$

$$
\begin{aligned}
p \vee (\overline{p \wedge q}) &= p \vee \overline{p} \vee \overline{q} && \text{(DeMorgan-Gesetz)}\\
&= (p \vee \overline{p}) \vee \overline{q} && \text{(Assoziativgesetz)}\\
&= 1 \vee \overline{q} && \text{(Inverses Element)}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

2. Zu zeigen: $(a \leftrightarrow b) = ((a \vee b) \rightarrow (ab))$

$$
\begin{aligned}
(a \leftrightarrow b) &= (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)\\
&= (\overline{a} \vee b) \wedge (\overline{b} \vee a)\\
&= ((\overline{a} \vee b) \wedge \overline{b}) \vee ((\overline{a} \vee b) \wedge a))\\
&= (\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge a)\\
&= (\overline{a \vee b}) \vee (b \wedge a)\\
&= (a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)
\end{aligned}
$$

   oder:

$$
\begin{aligned}
(a \leftrightarrow b) &= (\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge b)\\
&= (\overline{a \vee b}) \vee (a \wedge b)\\
&= (a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)
\end{aligned}
$$

Lösung 6

$$y = \overline{b}\,\overline{a} \vee a = (\overline{a} \vee a) \wedge (\overline{b} \vee a) = \overline{b} \vee a$$

1. $(\wedge, \vee, \;)$: $y = \overline{b} \vee a$

   $(\wedge, \;)$: $y = \overline{\overline{\overline{b} \vee a}} = \overline{b \wedge \overline{a}}$

   $(\vee, \;)$: $y = \overline{b} \vee a$

2. $(\overline{\wedge})$: $\quad y = \overline{\overline{\overline{b} \vee a}} = b \overline{\wedge} \overline{a} = b \overline{\wedge} (a \overline{\wedge} a)$

   $(\overline{\vee})$: $\quad y = \overline{\overline{\overline{b} \vee a}} = \overline{\overline{b} \overline{\vee} a} = \overline{(b \overline{\vee} b) \overline{\vee} a} = ((b \overline{\vee} b) \overline{\vee} a) \overline{\vee} ((b \overline{\vee} b) \overline{\vee} a)$

   $(\wedge, \nleftrightarrow)$: $\quad y = \overline{b} \vee a = (b \nleftrightarrow 1) \vee a = (b \nleftrightarrow 1) \nleftrightarrow a \nleftrightarrow ((b \nleftrightarrow 1) \wedge a)$

3. Die Negation und Konjunktion lassen sich durch die Operatoren Äquivalenz und Disjunktion ersetzen

   - Negation: $\overline{x} = x \leftrightarrow 0$
   - Konjunktion:

   $$x_0 \wedge x_1 = \overline{\overline{x}_0 \vee \overline{x}_1} = ((x_0 \leftrightarrow 0) \vee (x_1 \leftrightarrow 0)) \leftrightarrow 0 = (x_0 \vee x_1) \leftrightarrow x_0 \leftrightarrow x_1$$

   Somit bildet $(\vee, \leftrightarrow)$ ein vollständiges Operatorensystem.

   Die Funktion y lässt sich in diesem Operatorensystem darstellen.

   $$y = \overline{b} \vee a = (b \leftrightarrow 0) \vee a$$

<u>Lösung 7</u>

1. y in zweistufiger disjenktiver Form:

$$\begin{aligned}
y &= bd \vee \overline{((a \vee b) \overline{\wedge} (c \nleftrightarrow d))} \vee \overline{ab \vee \overline{d}} \\
&= bd \vee \Big((a \vee b)(c \nleftrightarrow d)\Big) \vee \Big((\overline{a} \vee \overline{b})d)\Big) \\
&= bd \vee \Big((a \vee b)(c\overline{d} \vee \overline{c}d)\Big) \vee (\overline{a}d \vee a\overline{d}) \\
&= bd \vee ac\overline{d} \vee a\overline{c}d \vee bc\overline{d} \vee b\overline{c}d \vee \overline{a}d \vee \overline{b}d \\
&= d \vee ac\overline{d} \vee bc\overline{d}
\end{aligned}$$

2. DNF (durch Erweiterung):

$$\begin{aligned}
y &= d \vee ac\overline{d} \vee bc\overline{d} \\
&= d(c \vee \overline{c})(b \vee \overline{b})(a \vee \overline{a}) \vee ac\overline{d}(b \vee \overline{b}) \vee bc\overline{d}(a \vee \overline{a}) \\
&= dcba \vee dcb\overline{a} \vee dc\overline{b}a \vee dc\overline{b}\overline{a} \vee d\overline{c}ba \vee d\overline{c}b\overline{a} \vee d\overline{c}\overline{b}a \vee d\overline{c}\overline{b}\overline{a} \vee \\
&\quad \overline{d}cba \vee \overline{d}c\overline{b}a \vee \overline{b}cb\overline{a}
\end{aligned}$$

3. KNF (durch Erweiterung):

$$\begin{aligned}
y &= d \vee ac\overline{d} \vee bc\overline{d} \\
&= (d \vee a)(d \vee c)(d \vee \overline{d}) \vee bc\overline{d} \;=\; (d \vee a)(d \vee c) \vee bc\overline{d} \\
&= (d \vee a \vee b)(d \vee a \vee c)(d \vee a \vee \overline{d})(d \vee c \vee b)(d \vee c \vee c) \vee (d \vee c \vee \overline{d}) \\
&= (d \vee a \vee b)(c \vee \overline{c})\ (d \vee a \vee c)(b \vee \overline{b})\ (d \vee c \vee b)(a \vee \overline{a})\ (d \vee c)(b \vee \overline{b})(a \vee \overline{a}) \\
&= (d \vee c \vee b \vee a)(d \vee \overline{c} \vee b \vee a)(d \vee c \vee \overline{b} \vee \overline{a})(d \vee c \vee b \vee \overline{a})(d \vee c \vee \overline{b} \vee a)
\end{aligned}$$