4. Übung
Minimierungsverfahren

- Graphische Verfahren
- Quine-McCluskey-Verfahren
- Consensus-Verfahren
- Nelson-Verfahren
- Bündelminimierung

Konjunktive Minimalform

$$f(d,c,b,a) = MINt(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

$$\overline{f(d,c,b,a)} = MAXt(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

Primimplikanten:

A: $\bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a}$ 0 0 – 0

B: $\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$

C: $\bar{d}\,b\,\bar{a}$

D: $\bar{d}\,c\,b$

E: $d\,\bar{b}$

F: $c\,a$

Primimplikate

$(d \vee c \vee a)$

$(c \vee b \vee a)$

$(d \vee \bar{b} \vee a)$

$(d \vee \bar{c} \vee \bar{b})$

$(\bar{d} \vee b)$

$(\bar{c} \vee \bar{a})$

Konjunktive Minimalform

Überdeckungsfunktion:

$$ü_f = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$$

DMF:

$$f(d,c,b,a) = \underline{d\,\bar{b}} \vee c\,\underline{a} \vee \begin{cases} \bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,b\,\bar{a} \\ \bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,c\,b \\ \bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,b\,\bar{a} \end{cases}$$

$(d \vee \bar{b} \vee a)$

KMF:

$$\bar{f}(d,c,b,a) = (\bar{d} \vee b) \cdot (\bar{c} \vee \bar{a}) \cdot \begin{cases} (d \vee c \vee a)(\\ \vdots \end{cases}$$

Aufgabe 4

Eine unvollständig definierte Schaltfunktion sei durch ihre Eins- und don‘t care-Stellen (Abkürzung **D**) gegeben:

$$f\,(e,d,c,b,a) = \text{MINt}(12,13,14,15,29,30) \vee D\,(17,18)$$

- Bestimmen Sie alle Primimplikanten der Funktion f(e,d,c,b,a) mit Hilfe vom Quine-McCluskey-Verfahren
- Geben Sie eine disjunktive Minimalform von f(e,d,c,b,a) an.

Aufgabe 4

j	Nr.	0. Ordnung
2	17	10001 (x)
	18	10010 (x)
	12	01100 ✓
3	13	01101 ✓
	14	01110 ✓
4	15	01111 ✓
	29	11101 ✓
	30	11110 ✓

j	Nr.	1. Ordnung
2	12,13	0110- ✓
	12,14	011-0 ✓
3	13,15	011-1 ✓
	13,29	-1101 C
	14,15	0111- ✓
4	14,30	-1110 B

j	Nr.	2. Ordnung
2	12,13,14,15	011-- A
	12,14,13,15	~~011--~~

$e\bar{d}\bar{c}ba$

$e\bar{d}\bar{c}b\bar{a}$

Primimplikanten:

A: **011--** $\bar{e}dc$

B: **-1110** $dcb\bar{a}$

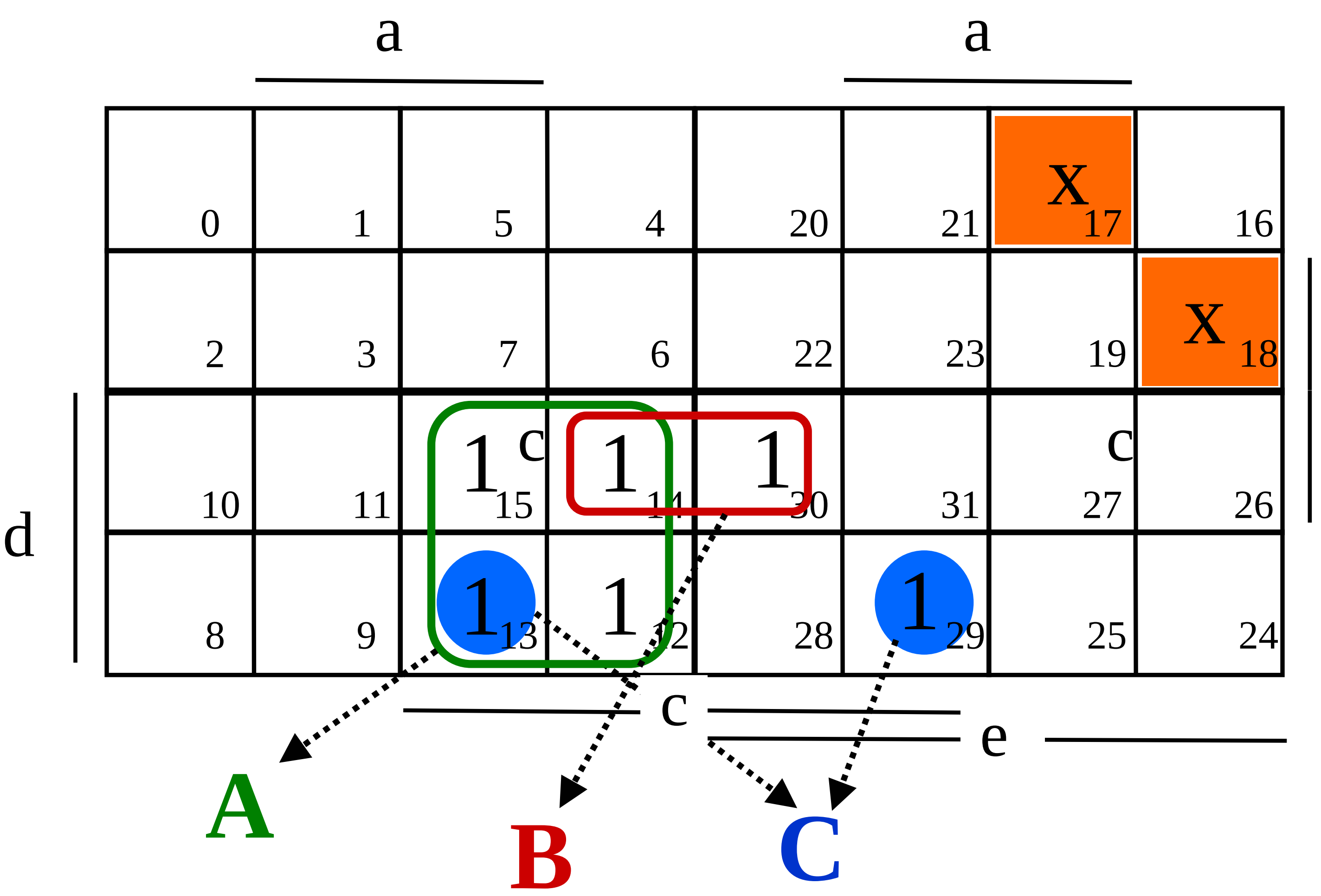
C: **-1101** $dc\bar{b}a$

Alle Primimplikanten sind Kernprimimplikanten. Die Freistellen wurden mit keinem Minterm zusammengefasst. Sie dürfen in der Minimalform **nicht** aufgenommen werden

➔ DMF: $\mathbf{A \vee B \vee C = \bar{e}dc \vee dcb\bar{a} \vee dc\bar{b}a}$

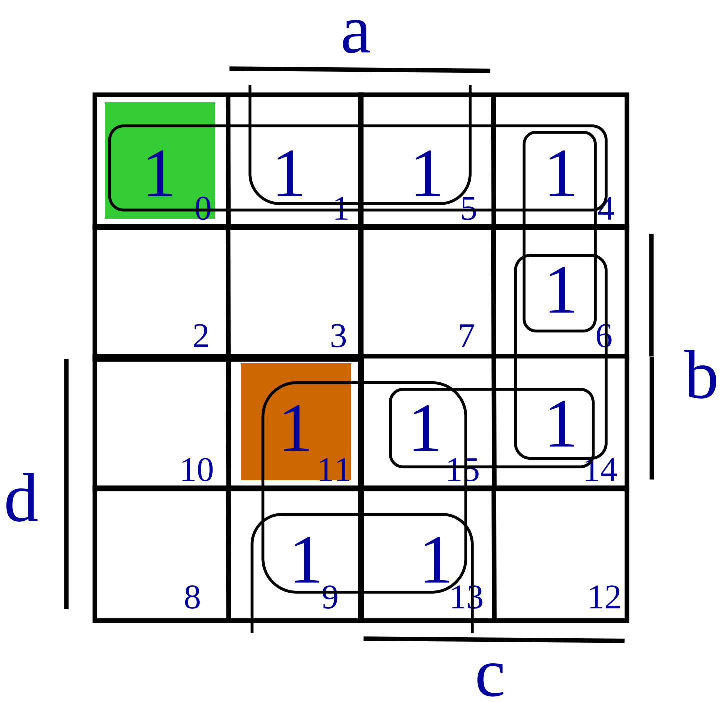
Aufgabe 4

$f(e,d,c,b,a) = MINt(12,13,14,15,29,30) \vee D(17,18)$



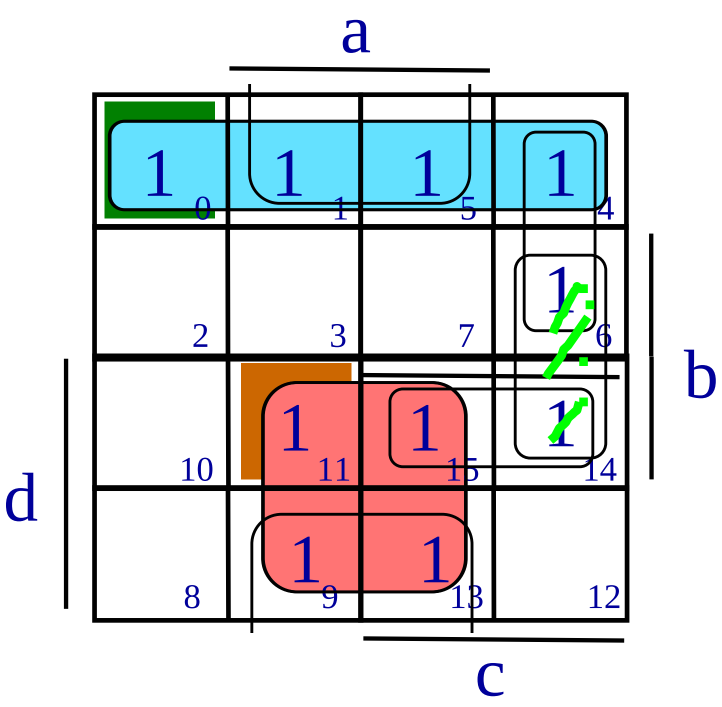
Das Überdeckungsproblem

Kernprimimplikanten: Primimplikanten, die für einen einzelnen Eintrag in einer Spalte verantwortlich sind.



PI	Minterme 0	1	4	5	6	9	11	13	14	15
$\bar{d}\,\bar{b}$	x	x	x	x						
$\bar{b}\,a$		x		x		x		x		
$d\,a$						x	x	x		x
$d\,c\,b$									x	x
$c\,b\,\bar{a}$					x				x	
$\bar{d}\,c\,\bar{a}$			x		x					

Das Überdeckungsproblem

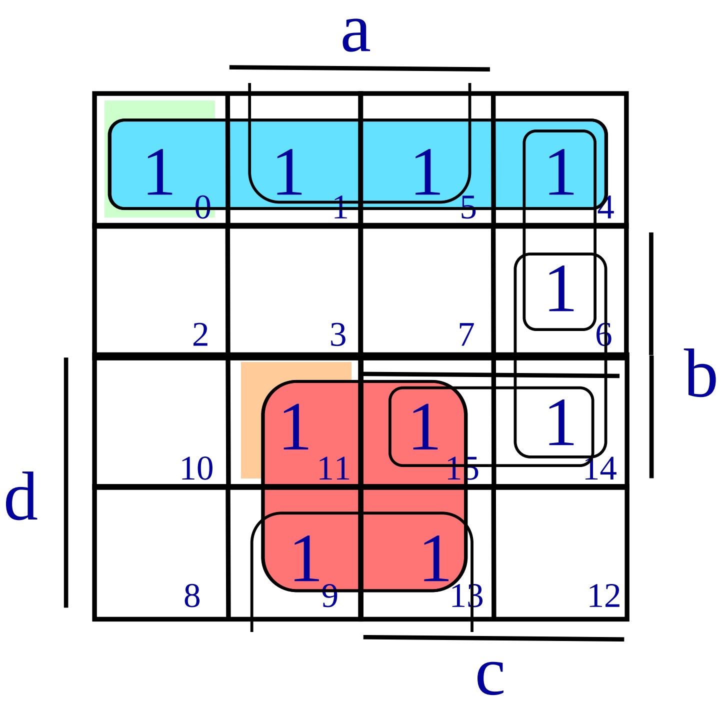


PI	Minterme $\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	6	$\cancel{9}$	$\cancel{11}$	$\cancel{13}$	14	$\cancel{15}$
$\bar{d}\ \bar{b}$	x	x	x	x						
$\bar{b}\ a$		x		x		x		x		
$d\ a$						x	x	x		x
$d\ c\ b$									x	x
$c\ b\ \bar{a}$					x				x	
$\bar{d}\ c\ \bar{a}$			x		x					

Spaltendominaz: Spalten, die andere überdecken, können gestrichen werden (Hier: Keine).

Das Überdeckungsproblem

Zeilendominaz: Zeilen mit nur Einträgen, die andere Zeile hat, können gestrichen werden (falls sie nicht „billiger“ sind)



PI	Minterme ~~0~~	~~1~~	~~4~~	~~5~~	6	~~9~~	~~11~~	~~13~~	14	~~15~~
$\bar{d}\ \bar{b}$	x	x	x	x						
$\bar{b}\ a$		x		x		x		x		
$d\ a$						x	x	x		x
~~$d\ c\ b$~~									x	x
$c\ b\ \bar{a}$					x				x	
~~$\bar{d}\ c\ \bar{a}$~~			x		x					

DMF: $\bar{d}\ \bar{b} \vee d\ a \vee c\ b\ \bar{a}$

Cosensus-Verfahren

Das Consensus-Verfahren kann als Erweiterung des Quine-McCluskey Verfahrens gesehen werden.

Consensus-Regel:

In der booleschen Algebra gelten die beiden folgenden, hier für die Schaltalgebra beschriebenen Identitäten:

$$\mathbf{x\, u \vee \bar{x}\, w = x\, u \vee \bar{x}\, w \vee u\, w}$$

$$\mathbf{(x \vee W) \cdot (\bar{x} \vee U) = (x \vee W) \cdot (\bar{x} \vee U) \cdot (U \vee W)}$$

$\mathbf{x}$ ist eine beliebige Variable,

$\mathbf{u}$ und $\mathbf{w}$ bzw. $\mathbf{U}$ und $\mathbf{W}$ sind beliebige Schaltfunktionen.

(u und w sind meist Konjunktionen, U und W Disjunktionen in den unabhängigen Variablen)

Aufgabe 5

Gegeben sei eine Anfangsüberdeckung der Einsstellen einer Booleschen Funktion $f(e,d,c,b,a)$:

$$C = \{ (-, 0, -, 0, 0), (-, -, 0, 0, -), (-, 1, -, 0, 0), (0, 1, 0, -, 1), (1, -, 1, 1, -), (1, 1, 0, -, 1) \}$$

Gesucht: Alle Primimplikanten und die DMF

Consensus-Verfahren

Nr.	Gebildet aus	Würfel e d c b a	Gestrichen wegen	
~~1~~		~~- 0 - 0 0~~	⊂ 7	
2		- - 0 0 -		$\Rightarrow \bar{c}\,\bar{b}$
~~3~~		~~- 1 - 0 0~~	⊂ 7	
~~4~~		~~0 1 0 - 1~~	⊂ 9	
5		1 - 1 1 -		$\Rightarrow e\,c\,b$
~~6~~		~~1 1 0 - 1~~	⊂ 9	
7	3,1	- - - 0 0		$\Rightarrow \bar{b}\,\bar{a}$
8	6,5	1 1 - 1 1		$\Rightarrow e\,d\,b\,a$
9	6,4	- 1 0 - 1		$\Rightarrow d\,\bar{c}\,a$
10	7,5	1 - 1 - 0		$\Rightarrow e\,c\,\bar{a}$
	8,2	~~1 1 0 - 1~~	⊂ 9	
	9,7	~~- 1 0 0 -~~	⊂ 2	
	9,5	~~1 1 - 1 1~~	= 8	
	10,8	~~1 1 1 1 -~~	⊂ 5	
	10,2	~~1 - - 0 0~~	⊂ 7	

DMF

Zur Bestimmung der DMF muss man das Überdeckungsproblem lösen (z. B. mit Hilfe der Überdeckungstabelle).

Durch welche Primimplikanten werden die einzelnen Minterme überdecket ?

Würfel (`- - 0 0 -`) überdeckt die Minterme:

```
(0 0 0 0 0) (1 0 0 0 0)
(0 0 0 0 1) (1 0 0 0 1)
(0 1 0 0 0) (1 1 0 0 0)
(0 1 0 0 1) (1 1 0 0 1)
```

Überdeckungstabelle (1)

PI	0	1	4	8	9	11	12	16	17	20	22	23	24	25	27	28	30	31
	Minterme																	
$\bar{c}\,\bar{b}$	x	x		x	x			x	x				x	x				
$e\,c\,b$											x	x					x	x
$\bar{b}\,\bar{a}$	x		x	x			x	x		x			x			x		
$e\,d\,b\,a$															x			x
$d\,\bar{c}\,a$					x	x						x			x			
$e\,c\,\bar{a}$										x	x					x	x	

Überdeckungstabelle (2)

PI	0	1	4	8	9	11	12	16	17	20	22	23	24	25	27	28	30	31
$\bar{c}\,\bar{b}$	x	x		x	x			x	x				x	x				
$e\,c\,b$											x	x					x	x
$\bar{b}\,\bar{a}$	x		x	x			x	x		x			x			x		
$e\,d\,b\,a$															x			x
$d\,\bar{c}\,a$					x	x						x			x			
$e\,c\,\bar{a}$										x	x					x	x	

Nelson-Verfahren

Das Verfahren von Nelson unterscheidet sich von den anderen dadurch, dass es die **Primimplikanten aus den Nullstellen** und die **Primimplikate aus den Einsstellen** der Funktion berechnet.

Ausdistribuieren aller Implikanten und anschließend Anwednung der Gesetze:

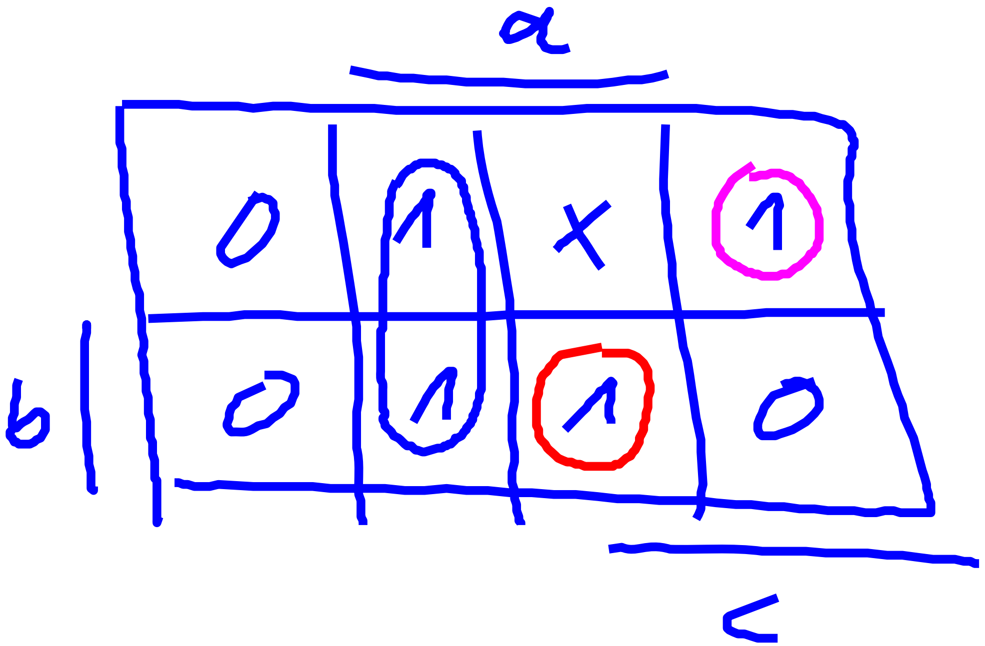
$$x \cdot \overline{x} = 0 \qquad x \vee \overline{x} = 1$$

$$x \cdot x = x \qquad x \vee x = x$$

$$x \vee x\,y = x \qquad x\,(x \vee y) = x$$

$$x \vee 0 = x \qquad x \cdot 1 = x$$

Es entsteht die Disjunktion aller Primimplikanten



$a\bar{c} \vee c\bar{b}\bar{a} \vee cba$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} f(d,c,b,a) &= (d \vee \bar{b})\,(c \vee a)\,(\bar{d} \vee \bar{c} \vee \bar{a})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\ &= (d\,c \vee \bar{b}\,c \vee d\,a \vee \bar{b}\,a)\,(\bar{d} \vee \bar{c} \vee \bar{a})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\ &= (d\,c\,\bar{a} \vee \bar{b}\,c\,\bar{d} \vee \bar{b}\,c\,\bar{a} \vee d\,a\,\bar{c} \vee \bar{b}\,a\,\bar{d} \vee \bar{b}\,a\,\bar{c})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\ &= \bar{b}\,c\,\bar{d} \;\vee\; \bar{b}\,a\,\bar{d} \;\vee\; d\,c\,\bar{a} \;\vee\; \bar{b}\,c\,\bar{a} \;\vee\; d\,a\,\bar{c}\,b \end{aligned}$$

KV-Diagramm:

		a	a		
	0	1	1	1	
b	0	0	0	0	
b	0	1	0	1	d
	0	0	0	1	d
			c	c	

DMF:

Überdeckungs-problem lösen !

Bündelminimierung

Gleichzeitige Minimierung mehrerer Boolescher Funktionen, die von denselben Eingangsvariablen abhängen, so dass sich geringere Gesamtkosten, gegenüber der Minimierung jeder einzelnen dieser Booleschen Funktionen, ergeben.

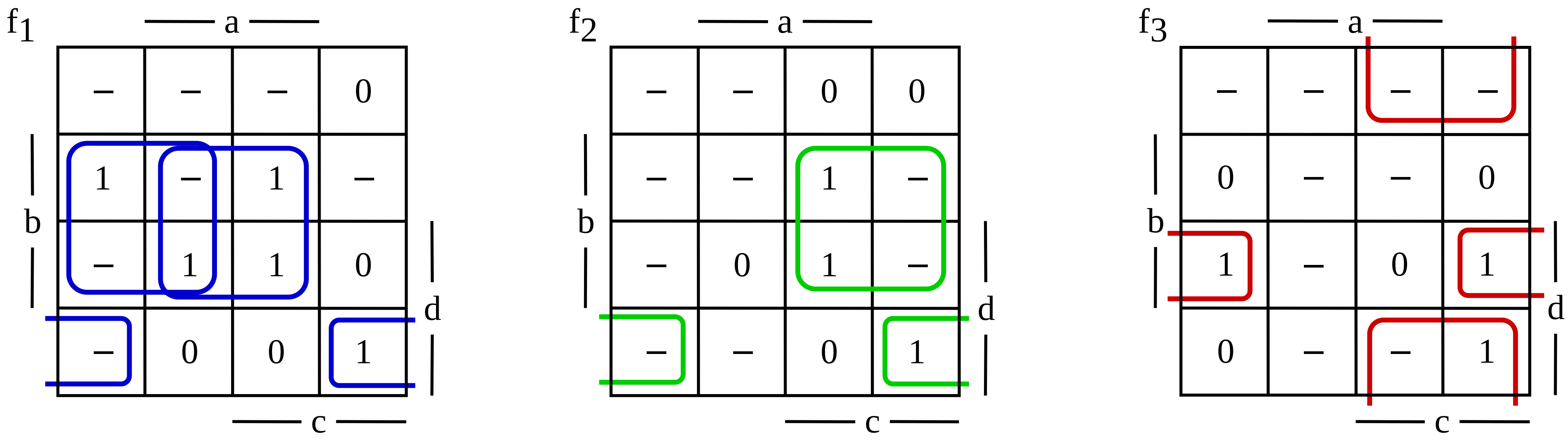
(Algorithmus zur Bündelminimierung: **ESPRESSO**)

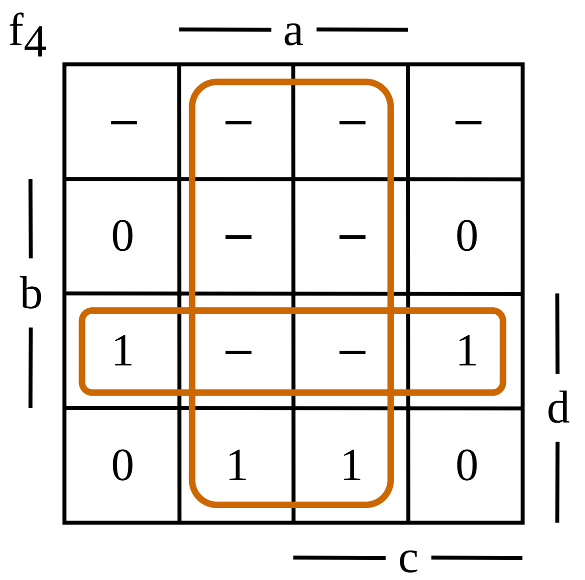
Hier: graphisch

Aufgabe 4:

Die $f_1(d,c,b,a)$ bis $f_4(d,c,b,a)$ einzeln und gemeinsam minimieren

Funktionen einzeln minimieren





Ergebnis:

3 + 2 + 2 + 2 = 9 Produktterme

Funktionen gemeinsam minimieren

f_1

		a	a		
	–	–	–	0	
b	1	–	1	–	
b	–	1	1	0	d
	–	0	0	1	d
			c	c	

f_2

		a	a		
	–	–	0	0	
b	–	–	1	–	
b	–	0	1	–	d
	–	–	0	1	d
			c	c	

f_3

		a	a		
	–	–	–	–	
b	0	–	–	0	
b	1	–	0	1	d
	0	–	–	1	d
			c	c	

f_4

		a	a		
	–	–	–	–	
b	0	–	–	0	
b	1	–	–	1	d
	0	1	1	0	d
			c	c	

Ergebnis: 5 Produktterme