4. Übung
Minimierungsverfahren

- Graphische Verfahren
- Quine-McCluskey-Verfahren
- Consensus-Verfahren
- Nelson-Verfahren
- Bündelminimierung

Konjunktive Minimalform

$$f(d,c,b,a) = MINt(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$
$$\overline{f(d,c,b,a)} = MAXt(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

Primimplikanten:

A: $\bar d \bar c \bar a$ 0 0 - 0
B: $\bar c \bar b \bar a$
C: $\bar d b \bar a$
D: $\bar d c b$
E: $d \bar b$
F: $c a$

Primimplikate

$(d \vee c \vee a)$
$(c \vee b \vee a)$
$(d \vee \bar b \vee a)$
$(d \vee \bar c \vee \bar b)$
$(\bar d \vee b)$
$(\bar c \vee \bar a)$

Konjunktive Minimalform

Überdeckungsfunktion:

$$ü_f = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$$

DMF: $f(d,c,b,a) = d\bar b \vee c a \vee \begin{cases} \bar d \bar c \bar a \vee \bar d b \bar a \\ \bar d \bar c \bar a \vee \bar d c b \\ \bar c \bar b \bar a \vee \bar d b \bar a \end{cases}$ $(d \vee \bar b \vee a)$

KMF: $\bar f(d,c,b,a) = (\bar d \vee b) \cdot (\bar c \vee \bar a) \cdot \begin{cases} (d \vee c \vee a)(\\ \vdots \end{cases}$

Aufgabe 4

Eine unvollständig definierte Schaltfunktion sei durch ihre Eins- und don't care-Stellen (Abkürzung **D**) gegeben:

$$f(e,d,c,b,a) = MINt(12,13,14,15,29,30) \vee D(17,18)$$

- Bestimmen Sie alle Primimplikanten der Funktion f(e,d,c,b,a) mit Hilfe vom Quine-McCluskey-Verfahren
- Geben Sie eine disjunktive Minimalform von f(e,d,c,b,a) an.

Aufgabe 4

j	Nr.	0. Ordnung
2	17	10001 (x)
	18	10010 (x)
	12	01100 ✓
3	13	01101 ✓
	14	01110 ✓
4	15	01111 ✓
	29	11101 ✓
	30	11110 ✓

j	Nr.	1. Ordnung
2	12,13	0110- ✓
	12,14	011-0 ✓
3	13,15	011-1 ✓
	13,29	-1101 C
	14,15	0111- ✓
4	14,30	-1110 B

j	Nr.	2. Ordnung
2	12,13,14,15	011-- A
	12,14,13,15	~~011--~~

$e \bar d \bar c \bar b a$
$e \bar d \bar c \bar b \bar a$

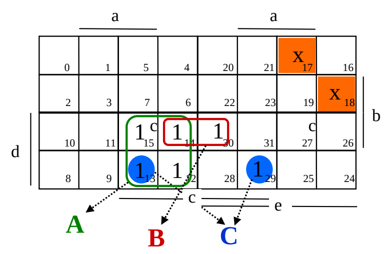
Primimplikanten:
A: **011--** $\bar e d c$
B: **-1110** $d c b \bar a$
C: **-1101** $d c \bar b a$

Alle Primimplikanten sind Kernprimimplikanten. Die Freistellen wurden mit keinem Minterm zusammengefasst. Sie dürfen in der Minimalform **nicht** aufgenommen werden

➔ DMF: $A \vee B \vee C = \bar e d c \vee d c b \bar a \vee d c \bar b a$

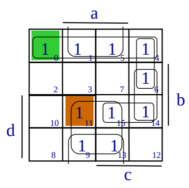
Aufgabe 4

$$f(e,d,c,b,a) = MINt(12,13,14,15,29,30) \vee D(17,18)$$



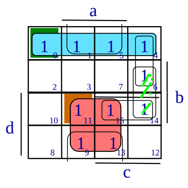
Das Überdeckungsproblem

Kernprimimplikanten: Primimplikanten, die für einen einzelnen Eintrag in einer Spalte verantwortlich sind.



PI	0	1	4	5	6	9	11	13	14	15
$\bar d \bar b$	x	x	x	x						
$\bar b a$		x		x		x		x		
$d a$						x	x	x		x
$d c b$									x	x
$c b \bar a$					x				x	
$\bar d c \bar a$			x		x					

Das Überdeckungsproblem

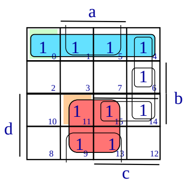


PI	0	1	4	5	6	9	11	13	14	15
$\bar d \bar b$	x	x	x	x						
$\bar b a$		x		x		x		x		
$d a$						x	x	x		x
$d c b$									x	x
$c b \bar a$					x				x	
$\bar d c \bar a$			x		x					

Spaltendominaz: Spalten, die andere überdecken, können gestrichen werden (Hier: Keine).

Das Überdeckungsproblem

Zeilendominaz: Zeilen mit nur Einträgen, die andere Zeile hat, können gestrichen werden (falls sie nicht „billiger" sind)



PI	0	1	4	5	6	9	11	13	14	15
$\bar d \bar b$	x	x	x	x						
$\bar b a$		x		x		x		x		
$d a$						x	x	x		x
~~$d c b$~~									x	x
$c b \bar a$					x				x	
~~$\bar d c \bar a$~~			x		x					

DMF: $\bar d \bar b \vee d a \vee c b \bar a$

Cosensus-Verfahren

Das Consensus-Verfahren kann als Erweiterung des Quine-McCluskey Verfahren gesehen werden.

Consensus-Regel:

In der booleschen Algebra gelten die beiden folgenden Identitäten: die Schaltalgebra beschriebenen Identitäten:

$$x\,u \vee \bar x\,w = x\,u \vee \bar x\,w \vee u\,w$$
$$(x \vee W) \cdot (\bar x \vee U) = (x \vee W) \cdot (\bar x \vee U) \cdot (U \vee W)$$

x ist eine beliebige Variable,
u und w bzw. U und W sind beliebige Schaltfunktionen.

(u und w sind meist Konjunktionen, U und W Disjunktionen in den unabhängigen Variablen)

Aufgabe 5

Gegeben sei eine Anfangsüberdeckung der Einsstellen einer Booleschen Funktion f(e,d,c,b,a):

$$C = \{(–, 0, –, 0, 0), (–, –, 0, 0, –), (–, 1, –, 0, 0), (0, 1, 0, –,1), (1, –, 1, 1, –), (1, 1, 0, –, 1)\}$$

Gesucht: Alle Primimplikanten und die DMF

Consensus-Verfahren

Nr.	Gebildet aus	Würfel (e d c b a)	Gestrichen wegen	
~~1~~		~~- 0 - 0 0~~	⊂ 7	
2		- - 0 0 -		⇒ $\bar c \bar b$
~~3~~		~~- 1 - 0 0~~	⊂ 7	
~~4~~		~~0 1 0 - 1~~	⊂ 9	
5		1 - 1 1 -		⇒ $e c b$
~~6~~		~~1 1 0 - 1~~	⊂ 9	
7	3,1	- - - 0 0		⇒ $\bar b \bar a$
8	6,5	1 1 - 1 1		⇒ $e d b a$
9	6,4	- 1 0 - 1		⇒ $d \bar c a$
10	7,5	1 - 1 - 0		⇒ $e c \bar a$
	8,2	~~1 1 0 - 1~~	⊂ 9	
	9,7	~~- 1 0 0 -~~	⊂ 2	
	9,5	~~1 1 - 1 1~~	= 8	
	10,8	~~1 1 1 1 -~~	⊂ 5	
	10,2	~~1 - - 0 0~~	⊂ 7	

DMF

Zur Bestimmung der DMF muss man das Überdeckungsproblem lösen (z. B. mit Hilfe der Überdeckungstabelle).

Durch welche Primimplikanten werden die einzelnen Minterme überdecket ?

Würfel `(- - 0 0 -)` überdeckt die Minterme:

```
(0 0 0 0 0) (1 0 0 0 0)
(0 0 0 0 1) (1 0 0 0 1)
(0 1 0 0 0) (1 1 0 0 0)
(0 1 0 0 1) (1 1 0 0 1)
```


Überdeckungstabelle (1)

PI	0	1	4	8	9	11	12	16	17	20	22	23	24	25	27	28	30	31
$\bar c \bar b$	x	x		x	x			x	x				x	x				
$e c b$											x	x					x	x
$\bar b \bar a$	x		x	x			x	x		x			x			x		
$e d b a$															x			x
$d \bar c a$					x	x						x			x			
$e c \bar a$										x	x					x	x	

Überdeckungstabelle (2)

PI	0	1	4	8	9	11	12	16	17	20	22	23	24	25	27	28	30	31
$\bar c \bar b$	x	x		x	x			x	x				x	x				
$e c b$											x	x					x	x
$\bar b \bar a$	x		x	x			x	x		x			x			x		
$e d b a$															x			x
$d \bar c a$					x	x						x			x			
$e c \bar a$										x	x					x	x	

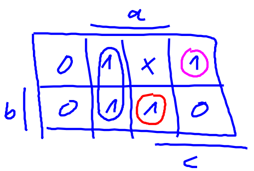
Nelson-Verfahren

Das Verfahren von Nelson unterscheidet sich von den anderen dadurch, dass es die **Primimplikanten aus den Nullstellen** und die **Primimplikate aus den Einsstellen** der Funktion berechnet.

Ausdistribuieren aller Implikanten und anschließend Anwendung der Gesetze:

$x \cdot \bar x = 0$	$x \vee \bar x = 1$
$x \cdot x = x$	$x \vee x = x$
$x \vee x\,y = x$	$x\,(x \vee y) = x$
$x \vee 0 = x$	$x \cdot 1 = x$

Es entsteht die Disjunktion aller Primimplikanten

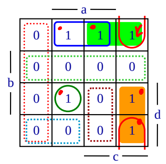


$a\bar{c} \vee c\bar{b}\bar{a} \vee cba$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} f(d,c,b,a) &= (d \vee \bar{b})\,(c \vee a)\,(\bar{d} \vee \bar{c} \vee \bar{a})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\ &= (d\,c \vee \bar{b}\,c \vee d\,a \vee \bar{b}\,a)\,(\bar{d} \vee \bar{c} \vee \bar{a})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\ &= (d\,c\,\bar{a} \vee \bar{b}\,c\,\bar{d} \vee \bar{b}\,c\,\bar{a} \vee d\,a\,\bar{c} \vee \bar{b}\,a\,\bar{d} \vee \bar{b}\,a\,\bar{c})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\ &= \bar{b}\,c\,\bar{d} \;\vee\; \bar{b}\,a\,\bar{d} \;\vee\; d\,c\,\bar{a} \;\vee\; \bar{b}\,c\,\bar{a} \;\vee\; d\,a\,\bar{c}\,b \end{aligned}$$

KV-Diagramm:



DMF:

Überdeckungs-problem lösen !

Bündelminimierung

Gleichzeitige Minimierung mehrerer Boolescher Funktionen, die von denselben Eingangsvariablen abhängen, so dass sich geringere Gesamtkosten, gegenüber der Minimierung jeder einzelnen dieser Booleschen Funktionen, ergeben.

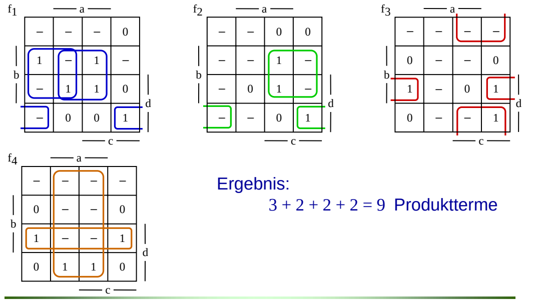
(Algorithmus zur Bündelminimierung: **ESPRESSO**)

Hier: graphisch

Aufgabe 4:

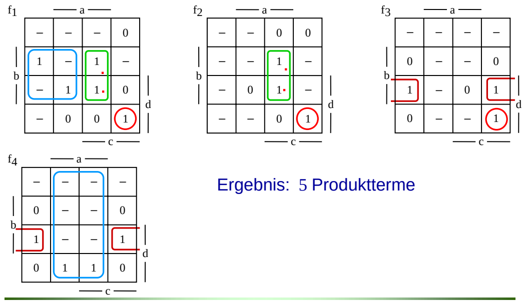
Die $f_1(d,c,b,a)$ bis $f_4(d,c,b,a)$ einzeln und gemeinsam minimieren

Funktionen einzeln minimieren



Ergebnis:
$3 + 2 + 2 + 2 = 9$ Produktterme

Funktionen gemeinsam minimieren



Ergebnis: 5 Produktterme