4. Übung
Minimierungsverfahren

- Graphische Verfahren
- Quine-McCluskey-Verfahren
- Consensus-Verfahren
- Nelson-Verfahren
- Bündelminimierung

Konjunktive Minimalform

$$f(d,c,b,a) = MINt(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

$$\overline{f(d,c,b,a)} = MAXt(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

Primimplikanten:

A: $\bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a}$ 0 0 - 0
B: $\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$
C: $\bar{d}\,b\,\bar{a}$
D: $\bar{d}\,c\,b$
E: $d\,\bar{b}$
F: $c\,a$

Primimplikate

$(d \vee c \vee a)$
$(c \vee b \vee a)$
$(d \vee \bar{b} \vee a)$
$(d \vee \bar{c} \vee \bar{b})$
$(\bar{d} \vee b)$
$(\bar{c} \vee \bar{a})$

Konjunktive Minimalform

Überdeckungsfunktion:

$$ü_f = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$$

DMF: $f(d,c,b,a) = d\,\bar{b} \vee c\,a \vee \begin{cases} \bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,b\,\bar{a} \\ \bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,c\,b \\ \bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,b\,\bar{a} \end{cases}$

$(d \vee \bar{b} \vee a)$

$(d \vee c \vee a)$

$\vdots$

KMF: $\bar{f}(d,c,b,a) = (\bar{d} \vee b) \cdot (\bar{c} \vee \bar{a}) \cdot$

Aufgabe 4

Eine unvollständig definierte Schaltfunktion sei durch ihre Eins- und don't care-Stellen (Abkürzung **D**) gegeben:

$$f(e,d,c,b,a) = MINt(12,13,14,15,29,30) \vee D(17,18)$$

- Bestimmen Sie alle Primimplikanten der Funktion f(e,d,c,b,a) mit Hilfe vom Quine-McCluskey-Verfahren
- Geben Sie eine disjunktive Minimalform von f(e,d,c,b,a) an.

Aufgabe 4

j	Nr.	0. Ordnung
2	17	10001 (x)
	18	10010 (x)
	12	01100 ✓
3	13	01101 ✓
	14	01110 ✓
4	15	01111 ✓
	29	11101 ✓
	30	11110 ✓

j	Nr.	1. Ordnung
2	12,13	0110- ✓
	12,14	011-0 ✓
3	13,15	011-1 ✓
	13,29	-1101 C
	14,15	0111- ✓
4	14,30	-1110 B

j	Nr.	2. Ordnung
2	12,13,14,15	011-- A
	~~12,14,13,15~~	~~011--~~

$e\bar{d}\bar{c}\bar{b}a$
$e\bar{d}\bar{c}b\bar{a}$

Primimplikanten:

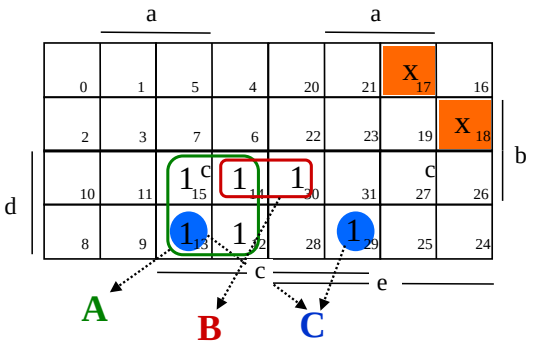
A: **011--** $\bar{e}\,d\,c$
B: **-1110** $d\,c\,b\,\bar{a}$
C: **-1101** $d\,c\,\bar{b}\,a$

Alle Primimplikanten sind Kernprimimplikanten. Die Freistellen wurden mit keinem Minterm zusammengefasst. Sie dürfen in der Minimalform **nicht** aufgenommen werden

➔ DMF: $A \vee B \vee C = \bar{e}\,d\,c \vee d\,c\,b\,\bar{a} \vee d\,c\,\bar{b}\,a$

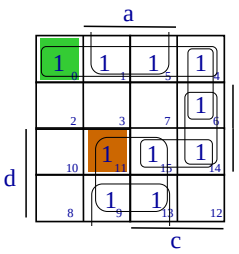
Aufgabe 4

$$f(e,d,c,b,a) = MINt(12,13,14,15,29,30) \vee D(17,18)$$



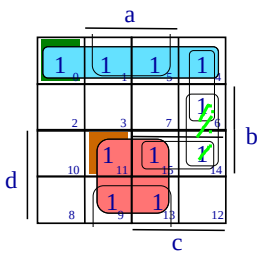
Das Überdeckungsproblem

Kernprimimplikanten: Primimplikanten, die für einen einzelnen Eintrag in einer Spalte verantwortlich sind.



PI	0	1	4	5	6	9	11	13	14	15
$\bar{d}\,\bar{b}$	x	x	x	x						
$\bar{b}\,a$		x		x		x		x		
$d\,a$						x	x	x		x
$d\,c\,b$									x	x
$c\,b\,\bar{a}$					x				x	
$\bar{d}\,c\,\bar{a}$			x		x					

Das Überdeckungsproblem

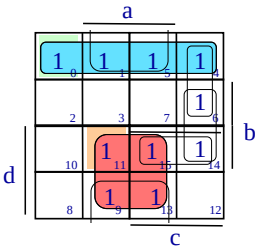


PI	0	1	4	5	6	9	11	13	14	15
$\bar{d}\,\bar{b}$	x	x	x	x						
$\bar{b}\,a$		x		x		x		x		
$d\,a$						x	x	x		x
$d\,c\,b$									x	x
$c\,b\,\bar{a}$					x				x	
$\bar{d}\,c\,\bar{a}$			x		x					

Spaltendominaz: Spalten, die andere überdecken, können gestrichen werden (Hier: Keine).

Das Überdeckungsproblem

Zeilendominaz: Zeilen mit nur Einträgen, die andere Zeile hat, können gestrichen werden (falls sie nicht „billiger“ sind)



PI	0	1	4	5	6	9	11	13	14	15
$\bar{d}\,\bar{b}$	x	x	x	x						
$\bar{b}\,a$		x		x		x		x		
$d\,a$						x	x	x		x
~~$d\,c\,\bar{b}$~~									~~x~~	~~x~~
$c\,b\,\bar{a}$					x				x	
~~$\bar{d}\,c\,\bar{a}$~~			~~x~~		~~x~~					

DMF: $\bar{d}\,\bar{b} \vee d\,a \vee c\,b\,\bar{a}$

Cosensus-Verfahren

Das Consensus-Verfahren kann als Erweiterung des Quine-McCluskey Verfahrens gesehen werden.

Consensus-Regel:

In der booleschen Algebra gelten die beiden folgenden, hier für die Schaltalgebra beschriebenen Identitäten:

$$x\,u \vee \bar{x}\,w = x\,u \vee \bar{x}\,w \vee u\,w$$

$$(x \vee W)\cdot(\bar{x} \vee U) = (x \vee W)\cdot(\bar{x} \vee U)\cdot(U \vee W)$$

x ist eine beliebige Variable,
u und **w** bzw. **U** und **W** sind beliebige Schaltfunktionen.

(u und w sind meist Konjunktionen, U und W Disjunktionen in den unabhängigen Variablen)

Aufgabe 5

Gegeben sei eine Anfangsüberdeckung der Einsstellen einer Booleschen Funktion f(e,d,c,b,a):

$$C = \{(-,0,-,0,0),\ (-,-,0,0,-),\ (-,1,-,0,0),\ (0,1,0,-,1),\ (1,-,1,1,-),\ (1,1,0,-,1)\}$$

Gesucht: Alle Primimplikanten und die DMF

Consensus-Verfahren

Nr.	Gebildet aus	Würfel (e d c b a)	Gestrichen wegen	
~~1~~		~~- 0 - 0 0~~	⊂ 7	
2		- - 0 0 -		⇒ $\bar{c}\,\bar{b}$
~~3~~		~~- 1 - 0 0~~	⊂ 7	
~~4~~		~~0 1 0 - 1~~	⊂ 9	
5		1 - 1 1 -		⇒ e c b
~~6~~		~~1 1 0 - 1~~	⊂ 9	
7	3,1	- - - 0 0		⇒ $\bar{b}\,\bar{a}$
8	6,5	1 1 - 1 1		⇒ e d b a
9	6,4	- 1 0 - 1		⇒ $d\,\bar{c}\,a$
10	7,5	1 - 1 - 0		⇒ $e\,c\,\bar{a}$
	8,2	~~1 1 0 - 1~~	⊂ 9	
	9,7	~~- 1 0 0 -~~	⊂ 2	
	9,5	~~1 1 - 1 1~~	= 8	
	10,8	~~1 1 1 1 -~~	⊂ 5	
	10,2	~~1 - - 0 0~~	⊂ 7	

DMF

Zur Bestimmung der DMF muss man das Überdeckungsproblem lösen (z. B. mit Hilfe der Überdeckungstabelle).

Durch welche Primimplikanten werden die einzelnen Minterme überdecket ?

Würfel (- - 0 0 -) überdeckt die Minterme:

(0 0 0 0 0) (1 0 0 0 0)
(0 0 0 0 1) (1 0 0 0 1)
(0 1 0 0 0) (1 1 0 0 0)
(0 1 0 0 1) (1 1 0 0 1)

Überdeckungstabelle (1)

PI	0	1	4	8	9	11	12	16	17	20	22	23	24	25	27	28	30	31
$\bar{c}\,\bar{b}$	x	x		x	x			x	x				x	x				
e c b											x	x					x	x
$\bar{b}\,\bar{a}$	x		x	x			x	x		x			x			x		
e d b a															x			x
$d\,\bar{c}\,a$					x	x						x			x			
$e\,c\,\bar{a}$										x	x					x	x	

Überdeckungstabelle (2)

PI	0	1	4	8	9	11	12	16	17	20	22	23	24	25	27	28	30	31
$\bar{c}\,\bar{b}$	x	x		x	x			x	x				x	x				
e c b											x	x					x	x
$\bar{b}\,\bar{a}$	x		x	x			x	x		x			x			x		
e d b a															x			x
$d\,\bar{c}\,a$					x	x						x			x			
$e\,c\,\bar{a}$										x	x					x	x	

Nelson-Verfahren

Das Verfahren von Nelson unterscheidet sich von den anderen dadurch, dass es die **Primimplikanten aus den Nullstellen** und die **Primimplikate aus den Einsstellen** der Funktion berechnet.

Ausdistribuieren aller Implikanten und anschließend Anwednung der Gesetze:

$x \cdot \bar{x} = 0$ $\qquad$ $x \vee \bar{x} = 1$

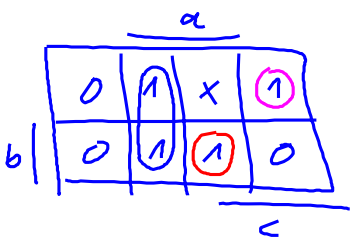
$x \cdot x = x$ $\qquad$ $x \vee x = x$

$x \vee x\,y = x$ $\qquad$ $x\,(x \vee y) = x$

$x \vee 0 = x$ $\qquad$ $x \cdot 1 = x$

Es entsteht die Disjunktion aller Primimplikanten

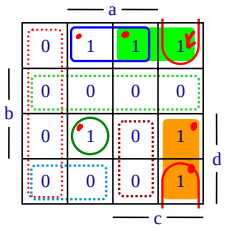
$a\bar{c} \vee c\bar{b}\bar{a} \vee cba$



Aufgabe 6

$$
\begin{aligned}
f(d,c,b,a) &= (d \vee \bar{b})\,(c \vee a)\,(\bar{d} \vee \bar{c} \vee \bar{a})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\
&= (d\,c \vee \bar{b}\,c \vee d\,a \vee \bar{b}\,a)\,(\bar{d} \vee \bar{c} \vee \bar{a})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\
&= (d\,c\,\bar{a} \vee \bar{b}\,c\,\bar{d} \vee \bar{b}\,c\,\bar{a} \vee d\,a\,\bar{c} \vee \bar{b}\,a\,\bar{d} \vee \bar{b}\,a\,\bar{c})\,(\bar{d} \vee c \vee b) \\
&= \bar{b}\,c\,\bar{d} \;\vee\; \bar{b}\,a\,\bar{d} \;\vee\; d\,c\,\bar{a} \;\vee\; \bar{b}\,c\,\bar{a} \;\vee\; d\,a\,\bar{c}\,b
\end{aligned}
$$

KV-Diagramm:



DMF:

Überdeckungs-problem lösen !

Bündelminimierung

Gleichzeitige Minimierung mehrerer Boolescher Funktionen, die von denselben Eingangsvariablen abhängen, so dass sich geringere Gesamtkosten, gegenüber der Minimierung jeder einzelnen dieser Booleschen Funktionen, ergeben.

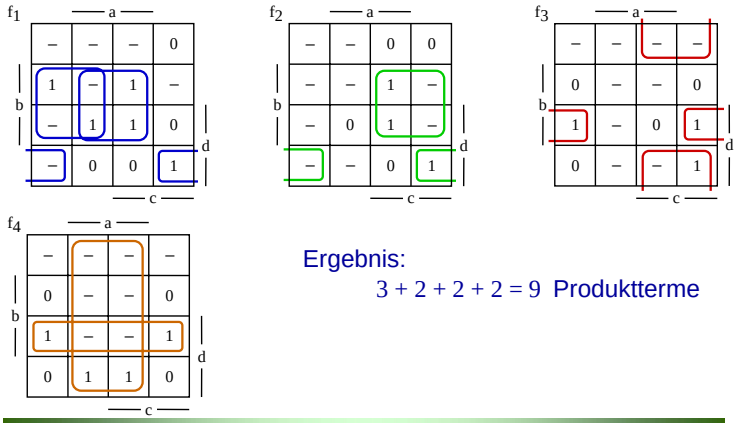
(Algorithmus zur Bündelminimierung: **ESPRESSO**)

Hier: graphisch

Aufgabe 4:

Die $f_1(d,c,b,a)$ bis $f_4(d,c,b,a)$ einzeln und gemeinsam minimieren

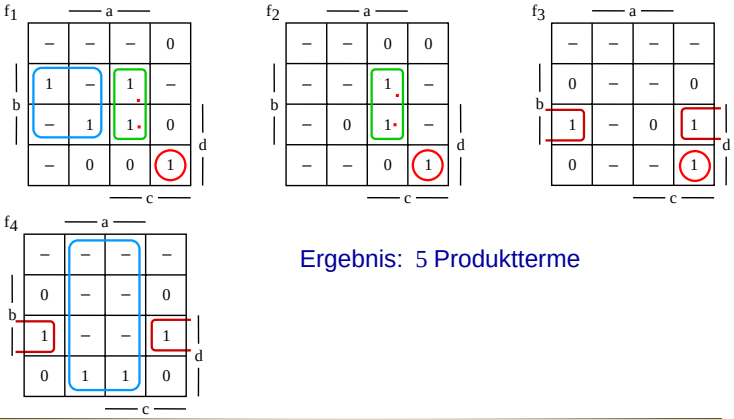
Funktionen einzeln minimieren



Ergebnis:

3 + 2 + 2 + 2 = 9 Produktterme

Funktionen gemeinsam minimieren



Ergebnis: 5 Produktterme