

---

# 4. Übung

## Minimierungsverfahren

- Graphische Verfahren
- Quine-McCluskey-Verfahren
- Consensus-Verfahren
- Nelson-Verfahren
- Bündelminimierung



# Vorgehensweise beim Minimieren

---

- Bestimmung aller Primterme
- Lösung des Überdeckungsproblems

# Vorgehensweise beim Minimieren

Aufgabenstellung	Primterme	Auswahl
Variablenanzahl $\leq 6$	KV-Diagramm	{ KV-Diagramm { Überdeckungstabelle
Geg. DF (KF) Ges. DMF (KMF)	Consensus Quine-McCluskey	{ Überdeckungstabelle
Geg. DF (KF) Ges. KMF (DMF)	Nelson	{ Überdeckungstabelle



# Aufgabe 1

---

Gegeben seien die Booleschen Funktionen:

- $f_1(d,c,b,a) = (b \vee c) (\bar{d} \vee \bar{c} \vee b) (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$
- $f_2(d,c,b,a) = a d c \vee b c \bar{d} \vee b c d \vee \bar{a} c d$

Vereinfachen Sie die Booleschen Ausdrücke der Funktionen

- durch algebraische Umformungen ✓
- mit Hilfe vom KV-Diagramm ✓



# Aufgabe 1

---

$$f_1(d,c,b,a) = (b \vee c) (\bar{d} \vee \bar{c} \vee b) (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$$



# Aufgabe 1

$$f_1(d,c,b,a) = \underbrace{(b \vee c)} \underbrace{(\bar{d} \vee \bar{c} \vee b)} \underbrace{(d \vee \bar{c} \vee b \vee a)}$$

	a				
	0	1	5	4	
	1	3	7	6	b
	10	11	15	14	
d	8	9	13	12	
	c				

$$f_1 = b \vee \bar{d} \bar{c} a$$

# Aufgabe 1

---

$$f_2(d,c,b,a) = a \underline{d} c \vee b \underline{c} \bar{d} \vee b \underline{c} \underline{d} \vee \bar{a} \underline{c} \underline{d}$$

*cd ∨ bc*





# Aufgabe 2

---

Gegeben sei die vollständig definierte Schaltfunktionen:

$$f(\underline{e, d, c, b, a}) = \text{MINt } (0,1,3,4,6,7,8,9,12,14,15,16,17,19,20,24,25,28)$$

Gesucht:

- Disjunktive Minimalform (DMF)
- Konjunktive Minimalform (KMF)

# Aufgabe 2

$f(e, d, c, b, a) = \text{MINt} (0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 24, 25, 28)$

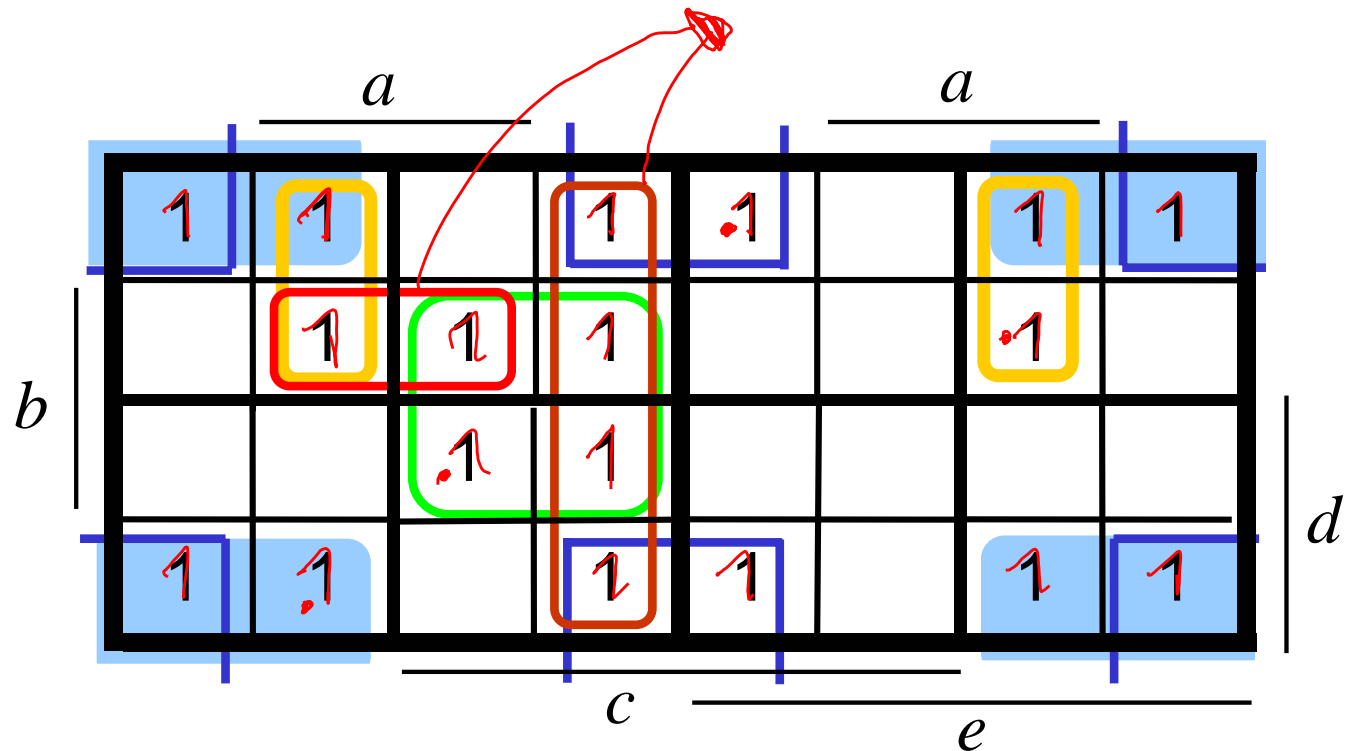
	a				a				
	0	1	5	4	20	21	17	16	
	2	3	7	6	22	23	19	18	
d	10	11	15	14	30	31	27	26	b
	8	9	13	12	28	29	25	24	
	c				e				



# DMF mit KV-Diagramm

Primimplikanten:

$\bar{e} c b$        $\bar{c} \bar{b}$   
 $\bar{e} c \bar{a}$        $\bar{b} \bar{a}$   
 $\bar{d} \bar{c} a$        $\bar{e} \bar{d} b a$



Kernprimimplikanten:

$\bar{b} \bar{a}$        $\bar{c} \bar{b}$        $\bar{e} c b$        $\bar{d} \bar{c} a$

Entbehrliche PI:

$\bar{e} c \bar{a}$        $\bar{e} \bar{d} b a$

DMF:

$$y = \bar{b} \bar{a} \vee \bar{c} \bar{b} \vee \bar{e} c b \vee \bar{d} \bar{c} a$$

# KMF mit KV-Diagramm

## Primimplikate:

$$\rightarrow \bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{b}$$

$$\bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{a}$$

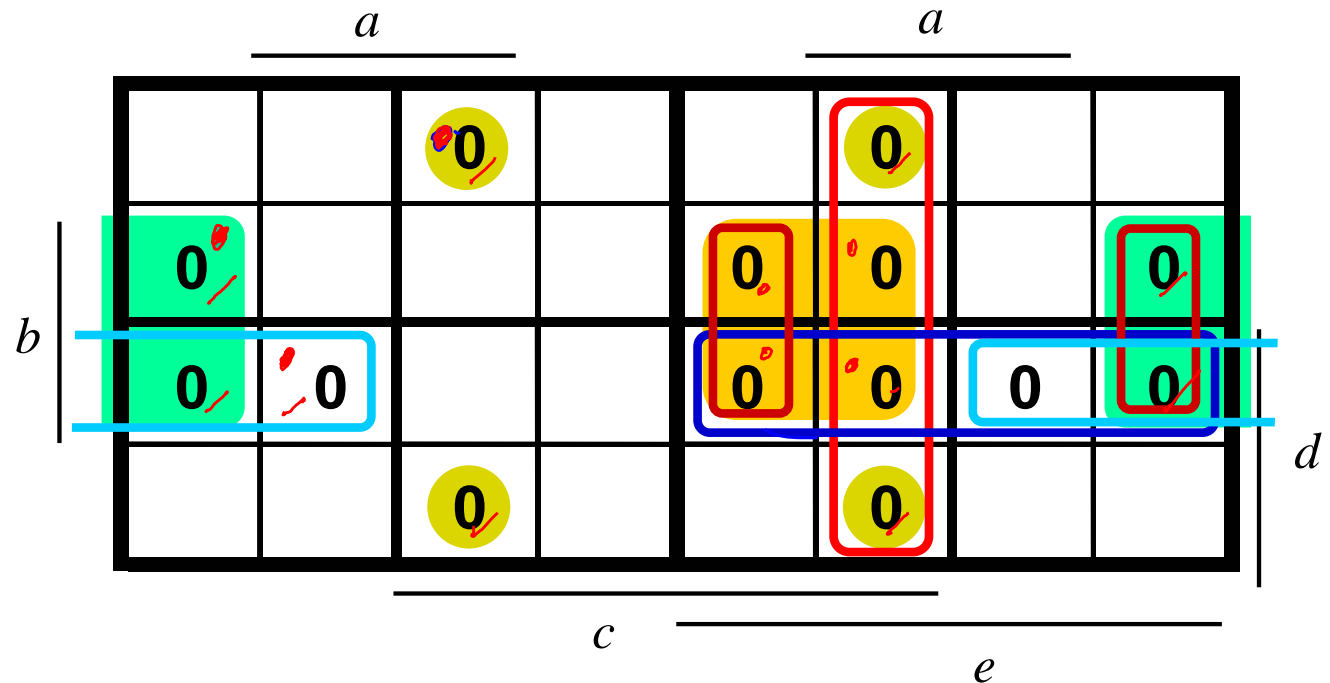
$$\bar{e} \vee \bar{d} \vee \bar{b}$$

$$\underline{c \vee \bar{b} \vee a}$$

$$\bar{e} \vee \bar{b} \vee a$$

$$\underline{\bar{c} \vee b \vee a^-}$$

$$\underline{\bar{d} \vee c \vee \bar{b}}$$



Kernprimimplikate

KMF:

$$y = (c \vee \bar{b} \vee a) (\bar{c} \vee b \vee a^-) \\ (\bar{d} \vee c \vee \bar{b}) (\bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{b})$$



# Quine-McCluskey-Verfahren

---

## 1. Schritt:

Die Minterme werden nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden nicht negierten Variablen geordnet

→ **1. Quineschen Tabelle**

## 2. Schritt:

Zwei Ausdrücke, **die sich nur in einer Variablen unterscheiden** werden durch Streichen der unterschiedlichen Variablen zusammengefasst.

Zwei Ausdrücke, aus denen ein neuer entstanden ist, werden **abgehakt** und sind somit **Keine Primimplikanten**; sie **nehmen jedoch weiter an den Vergleichen teil.**



# Quine-McCluskey-Verfahren

---

## 3. Schritt:

Schritt 2 wird solange wiederholt, bis keine neuen Spalten mehr in der Tabelle entstehen.

**Alle nicht abgehakten Ausdrücke in der Tabelle sind die Primblöcke (→ Primimplikanten).**

## 4. Schritt:

Umsetzen der entstehenden Primblöcke (Würfel) in Primimplikanten



# Aufgabe 3

---

**Gegeben:**  $f(d,c,b,a) = \text{MINt}(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$

**Gesucht:**

- Alle Primimplikanten der Funktion  $f(d,c,b,a)$  mit Hilfe vom Quine-McCluskey-Verfahren
- Alle disjunktiven Minimalformen von  $f(d,c,b,a)$

## 1. Schritt:

Die Minterme nach Gewicht (Anzahl der Einsen) sortieren

→ **1. Quineschen Tabelle**



# Bestimmung der Primimplikanten

$$f(d,c,b,a) = \text{MINt}(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

Gewicht	Nr.	0. Ordnung
0	0	0000
1	2	0010
	8	1000
2	5	0101
	6	0110
	9	1001
	12	1100
3	7	0111
	13	1101
4	15	1111

Anzahl der Vergleiche:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 20$$

Maximale Anzahl der Vergleiche:

$$n/2 * (n-1) \text{ bei } n \text{ Mintermen}$$



# Bestimmung der Primimplikanten

j	Nr.	0. Ordnung	j	Nr.	1. Ordnung	j	Nr.	2. Ordnung
0	0	-0000 ✓	0	0, 2	00-0 <b>A</b>	1	8, 9, 12, 13	1-0- <b>E</b>
1	2	0010 ✓	0	0, 8	-000 <b>B</b>		<del>8, 12, 9, 13</del>	<del>1-0-</del>
	8	-1000 ✓	1	2, 6	0-10 <b>C</b>	2	5, 7, 13, 15	-1-1 <b>F</b>
2	5	0101 ✓	1	8, 9	100- ✓		<del>5, 13, 7, 15</del>	<del>-1-1</del>
	6	0110 ✓	1	8, 12	1-00 ✓			
	9	1001 ✓	2	5, 7	01-1 ✓			
	12	1100 ✓	2	5, 13	-101 ✓			
3	7	0111 ✓	2	6, 7	011- <b>D</b>			
	13	1101 ✓	2	9, 13	1-01 ✓			
4	15	1111 ✓	2	12, 13	110- ✓			
			3	7, 15	-111 ✓			
			3	13, 15	11-1 ✓			

## Primimplikanten:

- A:  $\bar{d} \bar{c} \bar{a}$
- B:  $\bar{c} \bar{b} \bar{a}$
- C:  $\bar{d} b \bar{a}$
- D:  $\bar{d} c b$
- E:  $d \bar{b}$
- F:  $c a$

# Bestimmung der DMF

## Überdeckungstabelle (2. Quinesche Tabelle)

PI	Minterme									
	0	2	5	6	7	8	9	12	13	15
<b>A</b>	x	x								
<b>B</b>	x					x				
<b>C</b>		x		x						
<b>D</b>				x	x					
<b>E</b>						x	x	x	x	
<b>F</b>			x		x				x	x



# Bearbeitung der Überdeckungstabelle

---

- ❑ Suchen die Kernprimimplikanten und streiche alle von ihnen überdeckten Minterme
  
- ❑ Ausnutzung der Regeln der Dominanz:
  - Spaltendominanz: Streichen aller dominierenden Minterme
  - Zeilendominanz: Streichen aller dominierten Primimplikanten, falls sie nicht „teurer“ als ihre Dominierenden sind.
  
- ❑ Auswertung der reduzierten Überdeckungstabelle (Aufstellung der Überdeckungsfunktion der reduzierten Tabelle)



# Bearbeitung der Überdeckungstabelle

PI	Minterme										
	0	2	5	6	7	8	9	12	13	15	
<b>A</b>	x	x									
<b>B</b>	x					x					
<b>C</b>		x		x							
<b>D</b>				x	x						
<b>E</b>						x	x	x	x		
<b>F</b>			x		x					x	x

# Bearbeitung der Überdeckungstabelle

Reduzierte Überdeckungstabelle und Überdeckungsfunktion:

PI	Minterme		
	0	2	6
<b>A</b>	<del>x</del>	<del>x</del>	
<b>B</b>	x		
<b>C</b>		x	<u>x</u>
<b>D</b>			<u>x</u>

$$\ddot{u}_f = (w_A \vee w_B) (w_A \vee w_C) (w_C \vee w_D)$$

Überführung in eine disjunktive Form:

$$\Rightarrow \ddot{u}_f = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$$



# Disjunktive Minimalformen

Überdeckungsfunktion:

$$\ddot{u}_f = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$$

Primimplikanten:

$$A: \quad \bar{d} \bar{c} \bar{a}$$

$$B: \quad \bar{c} \bar{b} \bar{a}$$

$$C: \quad \bar{d} b \bar{a}$$

$$D: \quad \bar{d} c b$$

$$E: \quad \underline{d \bar{b}}$$

$$F: \quad \underline{c a}$$

Ergebnis:

$$f(d,c,b,a) = d \bar{b} \vee c a \vee \left\{ \begin{array}{l} \underline{\bar{d} \bar{c} \bar{a}} \vee \underline{\bar{d} b \bar{a}} \\ \underline{\bar{d} \bar{c} \bar{a}} \vee \underline{\bar{d} c b} \\ \underline{\bar{c} \bar{b} \bar{a}} \vee \underline{\bar{d} b \bar{a}} \end{array} \right.$$

# Konjunktive Minimalform

$$f(d,c,b,a) = \text{MAXt}(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

## Primimplikanten:

$$A: \bar{d} \bar{c} \bar{a}$$

$$B: \bar{c} \bar{b} \bar{a}$$

$$C: \bar{d} b \bar{a}$$

$$D: \bar{d} c b$$

$$E: d \bar{b}$$

$$F: c a$$

0 0 - 0

## Primimplikate

$$(dvcva)$$

$$(cvbva)$$

$$(dv\bar{b}va)$$

$$(dv\bar{c}v\bar{b})$$

$$(d\bar{v}b)$$

$$(\bar{c}v\bar{a})$$



# Konjunktive Minimalform

## Überdeckungsfunktion:

$$\ddot{u}_f = W_A W_C \vee W_A W_D \vee W_B W_C$$

**DMF:**  $f(d,c,b,a) = d \bar{b} \vee c a \vee \left\{ \begin{array}{l} \bar{d} \bar{c} \bar{a} \vee \bar{d} b \bar{a} \\ \bar{d} \bar{c} \bar{a} \vee \bar{d} c b \\ \bar{c} \bar{b} \bar{a} \vee \bar{d} b \bar{a} \end{array} \right.$

KMF

$$= (\bar{d} \vee b) (\bar{c} \vee \bar{a}) \cdot \left. \begin{array}{l} (d \vee c \vee a) (d \vee \bar{b} \vee a) \\ \vdots \end{array} \right\}$$