

4. Übung Minimierungsverfahren

- > Graphische Verfahren
- > Quine-McCluskey-Verfahren
- > Consensus-Verfahren
- > Nelson-Verfahren
- > Bündelminimierung

Vorgehensweise beim Minimieren

- Bestimmung aller Primterme
- Lösung des Überdeckungsproblems

Vorgehensweise beim Minimieren

Aufgabenstellung	Primterme	Auswahl
Variablenanzahl ≤ 6	KV-Diagramm	KV-Diagramm Überdeckungstabelle
Geg. DF (KF) Ges. DMF (KMF)	Consensus Quine-McCluskey	
Geg. DF (KF) Ges. KMF (DMF)	Nelson	Überdeckungstabelle

Aufgabe 1

Gegeben seien die Booleschen Funktionen:

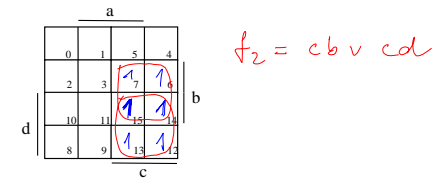
- $f_1(d,c,b,a) = (b \vee c) (\bar{d} \vee \bar{c} \vee b) (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$
- $f_2(d,c,b,a) = a \bar{d} c \vee b c \bar{d} \vee b c d \vee \bar{a} c d$

Vereinfachen Sie die Booleschen Ausdrücke der Funktionen

- > durch algebraische Umformungen ✓
- > mit Hilfe vom KV-Diagramm ✓

Aufgabe 1

$$f_2(d,c,b,a) = a \bar{d} c \vee b c \bar{d} \vee b c d \vee \bar{a} c d$$



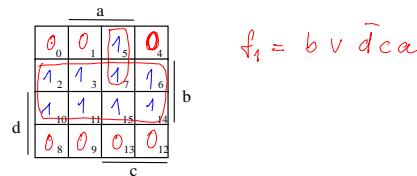
$$f_2 = c b \vee c d$$

Aufgabe 1

$$f_1(d,c,b,a) = (b \vee c) (\bar{d} \vee \bar{c} \vee b) (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$$

Aufgabe 1

$$f_1(d,c,b,a) = (b \vee c) (\bar{d} \vee \bar{c} \vee b) (d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$$



$$f_1 = b \vee d \bar{c} a$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die vollständig definierte Schaltfunktion:

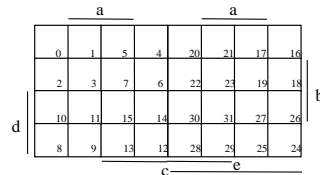
$$f(e, d, c, b, a) = \text{MINt}(0,1,3,4,6,7,8,9,12,14,15,16,17,19,20,24,25,28)$$

Gesucht:

- > Disjunktive Minimalform (DMF)
- > Konjunktive Minimalform (KMF)

Aufgabe 2

$$f(e, d, c, b, a) = \text{MINt}(0,1,3,4,6,7,8,9,12,14,15,16,17,19,20,24,25,28)$$



Aufgabe 1

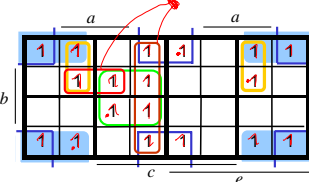
$$f_2(d,c,b,a) = a \bar{d} c \vee b c \bar{d} \vee b c d \vee \bar{a} c d$$

$$c d \vee b c$$

DMF mit KV-Diagramm

Primimplikanten:

- $\bar{e} c b$
- $\bar{e} c \bar{a}$
- $\bar{d} \bar{c} a$
- $\bar{c} \bar{b}$
- $\bar{b} \bar{a}$
- $\bar{e} \bar{d} b a$



Kernprimimplikanten:

- $\bar{b} \bar{a}$
- $\bar{c} \bar{b}$
- $\bar{e} c b$
- $\bar{d} \bar{c} a$

Entbehrliche PI:

- $\bar{e} c \bar{a}$
- $\bar{e} \bar{d} b a$

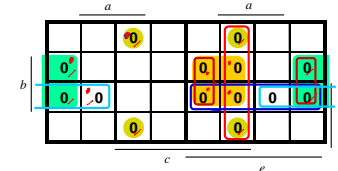
DMF:

$$y = \bar{b} \bar{a} \vee \bar{c} \bar{b} \vee \bar{e} c b \vee \bar{d} \bar{c} a$$

KMF mit KV-Diagramm

Primimplikante:

- $\bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{b}$
- $\bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{a}$
- $\bar{e} \vee \bar{d} \vee \bar{b}$
- $c \vee \bar{b} \vee a$
- $\bar{e} \vee \bar{b} \vee a$
- $\bar{e} \vee b \vee \bar{a}$
- $\bar{d} \vee c \vee \bar{b}$



Kernprimimplikate:

$$\text{KMF: } y = (c \vee \bar{b} \vee a) (\bar{e} \vee b \vee \bar{a}) (\bar{d} \vee c \vee \bar{b}) (\bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{b})$$

Quine-McCluskey-Verfahren

1. Schritt:

Die Minterme werden nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden nicht negierten Variablen geordnet
→ 1. Quineschen Tabelle

2. Schritt:

Zwei Ausdrücke, die sich nur in einer Variablen unterscheiden werden durch Streichen der unterschiedlichen Variablen zusammengefasst.

Zwei Ausdrücke, aus denen ein neuer entstanden ist, werden abgehakt und sind somit **Keine Primimplikanten**; sie nehmen jedoch weiter an den Vergleichen teil.

Quine-McCluskey-Verfahren

3. Schritt:

Schritt 2 wird solange wiederholt, bis keine neuen Spalten mehr in der Tabelle entstehen.

Alle nicht abgehakten Ausdrücke in der Tabelle sind die Primblöcke (→ Primimplikanten).

4. Schritt:

Umsetzen der entstehenden Primblöcke (Würfel) in Primimplikanten

Aufgabe 3

Gegeben: $f(d,c,b,a) = \text{MINt}(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$

Gesucht:

- Alle Primimplikanten der Funktion $f(d,c,b,a)$ mit Hilfe vom Quine-McCluskey-Verfahren
- Alle disjunktiven Minimalformen von $f(d,c,b,a)$

1. Schritt:

Die Minterme nach Gewicht (Anzahl der Einsen) sortieren
→ 1. Quineschen Tabelle

Bestimmung der Primimplikanten

$$f(d,c,b,a) = \text{MINt}(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

Gewicht	Nr.	0. Ordnung
0	0	0000
1	2	0010
1	8	1000
2	5	0101
2	6	0110
2	9	1001
2	12	1100
3	7	0111
3	13	1101
3	15	1111

Anzahl der Vergleiche:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 20$$

Maximale Anzahl der Vergleiche:

$$n/2 * (n-1) \text{ bei } n \text{ Mintermen}$$

Bestimmung der Primimplikanten

j	Nr.	0. Ordnung	j	Nr.	1. Ordnung	j	Nr.	2. Ordnung
0	0	0000 ✓	0	0,2	00-0 A	1	8,9,12,13	1-0- E
1	2	0010 ✓		0,8	-000 B		8,12,9,13	1-0-
8	8	1000 ✓	1	2,6	0-10 C	2	5,7,13,15	-1-1 F
				8,9	100- ✓		5,13,7,15	-1-1
2	5	0101 ✓	2	5,7	01-1 ✓			
6	6	0110 ✓		5,13	-101 ✓			
9	9	1001 ✓		6,7	011- D			
12	12	1100 ✓		9,13	1-01 ✓			
3	7	0111 ✓	3	7,15	-111 ✓			
13	13	1101 ✓		13,15	11-1 ✓			
4	15	1111 ✓						

Primimplikanten:

A: $\bar{d}\bar{c}\bar{a}$
 B: $\bar{c}\bar{b}\bar{a}$
 C: $\bar{d}\bar{b}\bar{a}$
 D: $\bar{d}c\bar{b}$
 E: $d\bar{b}$
 F: ca

Bestimmung der DMF

Überdeckungstabelle (2. Quinesche Tabelle)

PI	Minterme														
	0	2	5	6	7	8	9	12	13	15					
A	x	x													
B	x						x								
C		x		x											
D				x	x										
E							x	x	x	x					
F			x		x						x	x			

Bearbeitung der Überdeckungstabelle

- Suchen die Kernprimimplikanten und streiche alle von ihnen überdeckten Minterme
- Ausnutzung der Regeln der Dominanz:
 - Spaltendominanz: Streichen aller dominierenden Minterme
 - Zeilendominanz: Streichen aller dominierten Primimplikanten, falls sie nicht „teurer“ als ihre dominierenden sind.
- Auswertung der reduzierten Überdeckungstabelle (Aufstellung der Überdeckungsfunktion der reduzierten Tabelle)

Bearbeitung der Überdeckungstabelle

PI	Minterme														
	0	2	5	6	7	8	9	12	13	15					
A	x	x													
B	x						x								
C		x		x											
D				x	x										
E							x	x	x	x					
F			x		x						x	x			

Bearbeitung der Überdeckungstabelle

Reduzierte Überdeckungstabelle und Überdeckungsfunktion:

PI	Minterme		
	0	2	6
A	x	x	
B	x		
C		x	x
D			x

$$\bar{u}_i = (w_A \vee w_B) (w_A \vee w_C) (w_C \vee w_D)$$

Überführung in eine disjunktive Form:

$$\Rightarrow \bar{u}_i = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$$

Disjunktive Minimalformen

Überdeckungsfunktion:

$$\bar{u}_i = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$$

Primimplikanten:

- A: $\bar{d}\bar{c}\bar{a}$
- B: $\bar{c}\bar{b}\bar{a}$
- C: $\bar{d}\bar{b}\bar{a}$
- D: $\bar{d}c\bar{b}$
- E: $d\bar{b}$
- F: ca

Ergebnis:

$$f(d,c,b,a) = d\bar{b} \vee ca \vee \left\{ \begin{array}{l} \bar{d}\bar{c}\bar{a} \vee \bar{d}\bar{b}\bar{a} \\ \bar{d}\bar{c}\bar{a} \vee \bar{d}c\bar{b} \\ \bar{c}\bar{b}\bar{a} \vee \bar{d}\bar{b}\bar{a} \end{array} \right.$$

Konjunktive Minimalform

$$f(d,c,b,a) = \text{MAXt}(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$$

Primimplikanten:

- A: $\bar{d}\bar{c}\bar{a}$ 00-0
- B: $\bar{c}\bar{b}\bar{a}$
- C: $\bar{d}\bar{b}\bar{a}$
- D: $\bar{d}c\bar{b}$
- E: $d\bar{b}$
- F: ca

Primimplikate

- (dvcva)
- (cvbva)
- (dvbva)
- (dvbv)
- (cva)

Konjunktive Minimalform

Überdeckungsfunktion:

$$\bar{u}_i = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$$

$$\text{DMF: } f(d,c,b,a) = d\bar{b} \vee ca \vee \left\{ \begin{array}{l} \bar{d}\bar{c}\bar{a} \vee \bar{d}\bar{b}\bar{a} \\ \bar{d}\bar{c}\bar{a} \vee \bar{d}c\bar{b} \\ \bar{c}\bar{b}\bar{a} \vee \bar{d}\bar{b}\bar{a} \end{array} \right.$$

KMF

$$= (d\bar{b})(c\bar{a}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} (dvcva)(dvbva) \\ \vdots \end{array} \right.$$