4. Übung
Minimierungsverfahren

- Graphische Verfahren
- Quine-McCluskey-Verfahren
- Consensus-Verfahren
- Nelson-Verfahren
- Bündelminimierung

Vorgehensweise beim Minimieren

- Besitmmung aller Primterme
- Lösung des Überdeckungsproblems

Vorgehensweise beim Minimieren

Aufgabenstellung	Primterme	Auswahl
Variablenanzahl ≤ 6	KV-Diagramm	KV-Diagramm Überdeckungstabelle
Geg. DF(KF) Ges. DMF(KMF)	Consensus Quine-McCluskey	Überdeckungstabelle
Geg. DF(KF) Ges. KMF(DMF)	Nelson	Überdeckungstabelle

Aufgabe 1

Gegeben seien die Booleschen Funktionen:

- $f_1(d,c,b,a) = (b \vee c)(\bar{d} \vee \bar{c} \vee b)(d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$
- $f_2(d,c,b,a) = a\,d\,c \vee b\,c\,\bar{d} \vee b\,c\,d \vee \bar{a}\,c\,d$

Vereinfachen Sie die Booleschen Ausdrücke der Funktionen

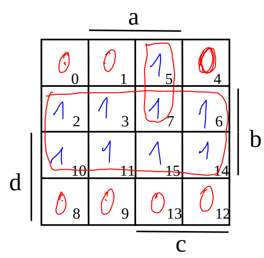
- durch algebraische Umformungen ✓
- mit Hilfe vom KV-Diagramm ✓

Aufgabe 1

$f_1(d,c,b,a) = (b \vee c)(\bar{d} \vee \bar{c} \vee b)(d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$

Aufgabe 1

$f_1(d,c,b,a) = (b \vee c)(\bar{d} \vee \bar{c} \vee b)(d \vee \bar{c} \vee b \vee a)$



$f_1 = b \vee \bar{d} c a$

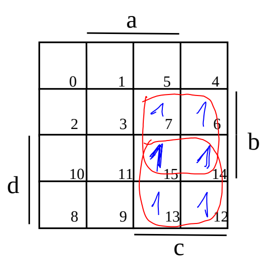
Aufgabe 1

$f_2(d,c,b,a) = a\,d\,c \vee b\,c\,\bar{d} \vee b\,c\,d \vee \bar{a}\,c\,d$

$cd \vee bc$

Aufgabe 1

$f_2(d,c,b,a) = a\,d\,c \vee b\,c\,\bar{d} \vee b\,c\,d \vee \bar{a}\,c\,d$



$f_2 = cb \vee cd$

Aufgabe 2

Gegeben sei die vollständig definierte Schaltfunktionen:

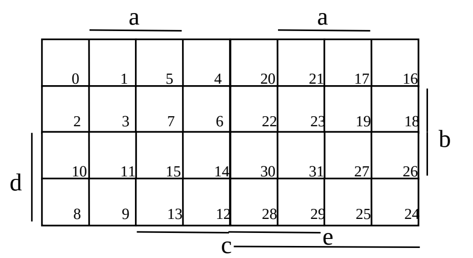
f(e, d,c,b,a) = MINt (0,1,3,4,6,7,8,9,12,14,15,16,17,19,20,24,25,28)

Gesucht:

- Disjunktive Minimalform (DMF)
- Konjunktive Minimalform (KMF)

Aufgabe 2

f(e, d,c,b,a) = MINt (0,1,3,4,6,7,8,9,12,14,15,16,17,19,20,24,25,28)



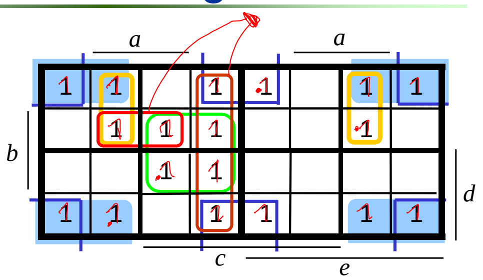
DMF mit KV-Diagramm

Primimplikanten:

$\bar{e}\,c\,b$ $\quad$ $\bar{c}\,\bar{b}$

$\bar{e}\,c\,\bar{a}$ $\quad$ $\bar{b}\,\bar{a}$

$\bar{d}\,\bar{c}\,a$ $\quad$ $\bar{e}\,\bar{d}\,b\,a$



Kernprimimplikanten: $\bar{b}\,\bar{a}$ $\quad$ $\bar{c}\,\bar{b}$ $\quad$ $\bar{e}\,c\,b$ $\quad$ $\bar{d}\,\bar{c}\,a$

Entbehrliche PI: $\bar{e}\,c\,\bar{a}$ $\quad$ $\bar{e}\,\bar{d}\,b\,a$

DMF: $y = \bar{b}\,\bar{a} \vee \bar{c}\,\bar{b} \vee \bar{e}\,c\,b \vee \bar{d}\,\bar{c}\,a$

KMF mit KV-Diagramm

Primimplikate:

$\bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{b}$

$\bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{a}$

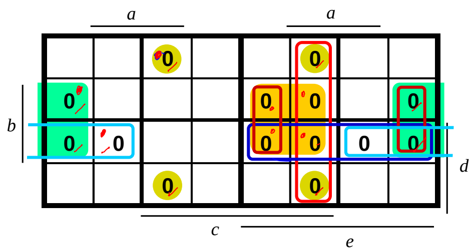
$\bar{e} \vee \bar{d} \vee \bar{b}$

$c \vee \bar{b} \vee a$

$\bar{e} \vee \bar{b} \vee a$

$\bar{c} \vee b \vee \bar{a}$

$\bar{d} \vee c \vee \bar{b}$



Kernprimimplikate

KMF:

$y = (c \vee \bar{b} \vee a)\,(\bar{c} \vee b \vee \bar{a})\,(\bar{d} \vee c \vee \bar{b})\,(\bar{e} \vee \bar{c} \vee \bar{b})$

Quine-McCluskey-Verfahren

1. Schritt:

Die Minterme werden nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden nicht negierten Variablen geordnet
→ **1. Quineschen Tabelle**

2. Schritt:

Zwei Ausdrücke, **die sich nur in einer Variablen unterscheiden** werden durch Streichen der unterschiedlichen Variablen zusammengefasst.

Zwei Ausdrücke, aus denen ein neuer entstanden ist, werden **abgehakt** und sind somit **Keine Primimplikanten; sie nehmen jedoch weiter an den Vergleichen teil.**

Quine-McCluskey-Verfahren

3. Schritt:

Schritt 2 wird solange wiederholt, bis keine neuen Spalten mehr in der Tabelle entstehen.

Alle nicht abgehakten Ausdrücke in der Tabelle sind die Primblöcke (→ Primimplikanten).

4. Schritt:

Umsetzen der entstehenden Primblöcke (Würfel) in Primimplikanten

Aufgabe 3

Gegeben: f (d,c,b,a) = MINt(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)

Gesucht:

- Alle Primimplikanten der Funktion f(d,c,b,a) mit Hilfe vom Quine-McCluskey-Verfahren
- Alle disjunktiven Minimalformen von f(d,c,b,a)

1. Schritt:

Die Minterme nach Gewicht (Anzahl der Einsen) sortieren
→ **1. Quineschen Tabelle**

Bestimmung der Primimplikanten

f (d,c,b,a) = MINt(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)

Gewicht	Nr.	0. Ordnung
0	0	0000
1	2	0010
	8	1000
2	5	0101
	6	0110
	9	1001
	12	1100
3	7	0111
	13	1101
4	15	1111

Anzahl der Vergleiche:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 20$

Maximale Anzahl der Vergleiche:

$n/2 * (n-1)$ bei $\mathbf{n}$ Mintermen

Bestimmung der Primimplikanten

dcba

j	Nr.	0. Ordnung
0	0	0000 ✓
1	2	0010 ✓
	8	1000 ✓
2	5	0101 ✓
	6	0110 ✓
	9	1001 ✓
	12	1100 ✓
3	7	0111 ✓
	13	1101 ✓
4	15	1111 ✓

j	Nr.	1. Ordnung
0	0,2	00-0 A
	0,8	-000 B
1	2,6	0-10 C
	8,9	100- ✓
	8,12	1-00 ✓
2	5,7	01-1 ✓
	5,13	-101 ✓
	6,7	011- D
	9,13	1-01 ✓
	12,13	110- ✓
3	7,15	-111 ✓
	13,15	11-1 ✓

j	Nr.	2. Ordnung
1	8,9,12,13	1-0- E
	~~8,12,9,13~~	~~1-0-~~
2	5,7,13,15	-1-1 F
	~~5,13,7,15~~	~~-1-1~~

Primimplikanten:

A: $\bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a}$
B: $\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$
C: $\bar{d}\,b\,\bar{a}$
D: $\bar{d}\,c\,b$
E: $d\,\bar{b}$
F: $c\,a$

Bestimmung der DMF

Überdeckungstabelle (2. Quinesche Tabelle)

PI	Minterme 0	2	5	6	7	8	9	12	13	15
A	x	x								
B	x					x				
C		x		x						
D				x	x					
E						x	x	x	x	
F			x		x				x	x

Bearbeitung der Überdeckungstabelle

- Suchen die Kernprimimplikanten und streiche alle von ihnen überdeckten Minterme
- Ausnutzung der Regeln der Dominanz:
  - Spaltendominanz: Streichen aller dominierenden Minterme
  - Zeilendominanz: Streichen aller dominierten Primimplikanten, falls sie nicht „teurer“ als ihre Dominierenden sind.
- Auswertung der reduzierten Überdeckungstabelle (Aufstellung der Überdeckungsfunktion der reduzierten Tabelle)

Bearbeitung der Überdeckungstabelle

PI	Minterme 0	2	5	6	7	8	9	12	13	15
A	x	x								
B	x					x				
C		x		x						
D				x	x					
E						x	x	x	x	
F			x		x				x	x

Bearbeitung der Überdeckungstabelle

Reduzierte Überdeckungstabelle und Überdeckungsfunktion:

PI	Minterme 0	2	6
A	x	x	
B	x		
C		x	x
D			x

$ü_f = (w_A \vee w_B)\,(w_A \vee w_C)\,(w_C \vee w_D)$

Überführung in eine disjunktive Form:

$\Rightarrow\ ü_f = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$

Disjunktive Minimalformen

Überdeckungsfunktion:

$ü_f = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$

Primimplikanten:

A: $\bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a}$
B: $\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$
C: $\bar{d}\,b\,\bar{a}$
D: $\bar{d}\,c\,b$
E: $d\,\bar{b}$
F: $c\,a$

Ergebnis:

$$f(d,c,b,a) = d\,\bar{b} \vee c\,a \vee \begin{cases} \bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,b\,\bar{a} \\ \bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,c\,b \\ \bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,b\,\bar{a} \end{cases}$$

Konjunktive Minimalform

$f(d,c,b,a) = \mathrm{MAXt}(0,2,5,6,7,8,9,12,13,15)$

Primimplikanten:

A: $\bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a}$ 0 0 – 0
B: $\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$
C: $\bar{d}\,b\,\bar{a}$
D: $\bar{d}\,c\,b$
E: $d\,\bar{b}$
F: $c\,a$

Primimplikate

$(d \vee c \vee a)$
$(c \vee b \vee a)$
$(d \vee \bar{b} \vee a)$
$(d \vee \bar{c} \vee \bar{b})$
$(\bar{d} \vee b)$
$(\bar{c} \vee \bar{a})$

Konjunktive Minimalform

Überdeckungsfunktion:

$ü_f = w_A w_C \vee w_A w_D \vee w_B w_C$

DMF:

$$f(d,c,b,a) = d\,\bar{b} \vee c\,a \vee \begin{cases} \bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,b\,\bar{a} \\ \bar{d}\,\bar{c}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,c\,b \\ \bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} \vee \bar{d}\,b\,\bar{a} \end{cases}$$

KMF

$= (\bar{d} \vee b)(\bar{c} \vee \bar{a}) \cdot \begin{cases} (d \vee c \vee a)(d \vee \bar{b} \vee a) \\ \vdots \end{cases}$