

---

# 2. Übung

- ❑ Boolesche Algebra (2. Aufgaben)
- ❑ Shannonscher Entwicklungssatz (2 Aufgaben)
- ❑ Boolesche Funktionen: (4 Aufgaben)
  - DNF, KNF
  - DMF, KMF



# Struktur der Booleschen Algebra

Verknüpfungsgebilde:  $\mathbf{BA} = [V, \oplus, \otimes]$

**Mengenalgebra (MA)**

$P(M)$

$S \in P(M)$  oder  $S \subseteq M$

$\bar{S}$

Operatoren:  $\cap, \cup$

Bezugsmenge:  $M \in P(M)$

Leere Menge:  $\emptyset \in P(M)$

**Boolesche Algebra (BA)**

$V$

$a \in V$

$\bar{a}$

Operatoren:  $\oplus, \otimes$

Einselement:  $e \in V$

Nullelement:  $n \in V$



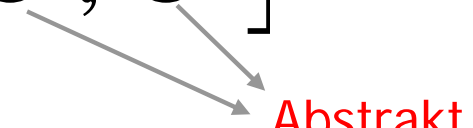
# Schaltalgebra

---

**Binäre Boolesche Algebra: Abstraktion**

$$BA2 = [ \{ n, e \}, \otimes, \oplus ]$$

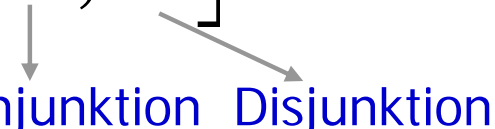
Abstrakt



**Schaltalgebra: Interpretation**

$$SA = [ \{ 0, 1 \}, \wedge, \vee ]$$

Konjunktion    Disjunktion





# Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra

---

**H0.**       $a \vee b \in \{0,1\}$   
               $a \wedge b \in \{0,1\}$

**H1.**       $a \vee b = b \vee a$   
               $a \wedge b = b \wedge a$

**H2.**       $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$   
               $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

**H3.**       $a \wedge 1 = a$   
               $a \vee 0 = a$

**H4.**       $a \wedge \bar{a} = 0$   
               $a \vee \bar{a} = 1$

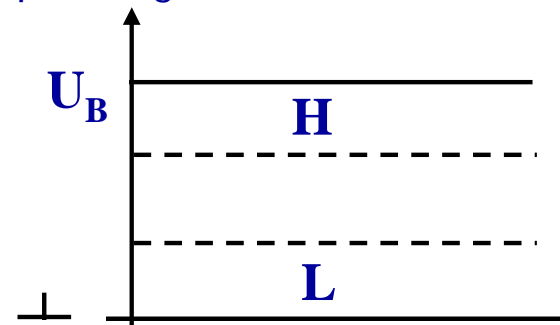


# Schaltalgebra



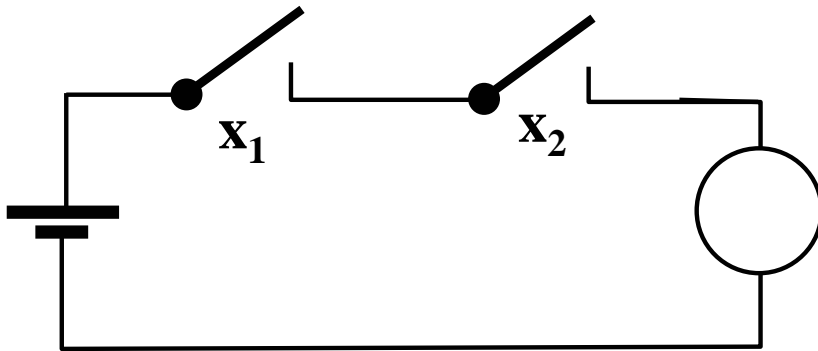
Zweiwertige Signaldarstellung:

physikalische Größe:  
Spannung

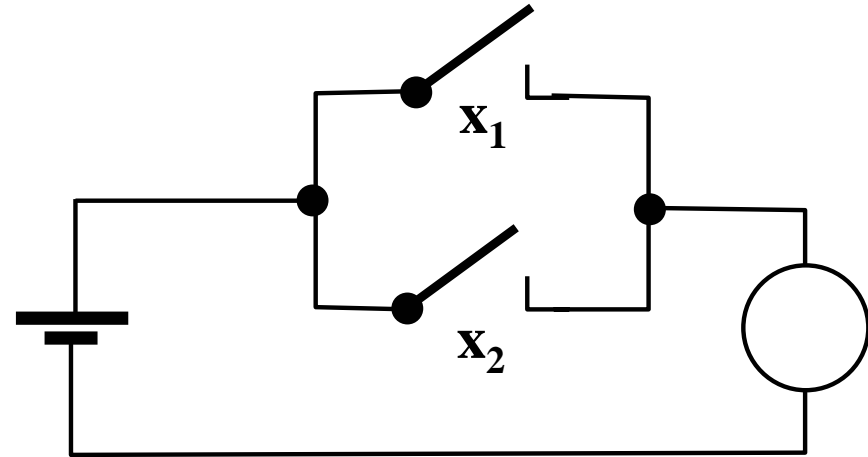


# Schaltalgebra

## Operationen:



Serienschaltung (ser)



Parallelschaltung (par)

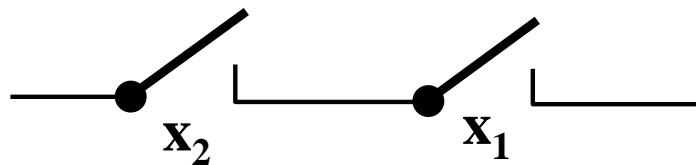
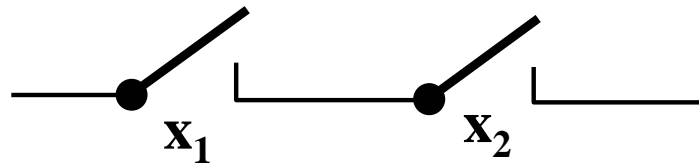
## H0: Abgeschlossenheit

$$x_1 \text{ ser } x_2 \in \{L, H\}$$

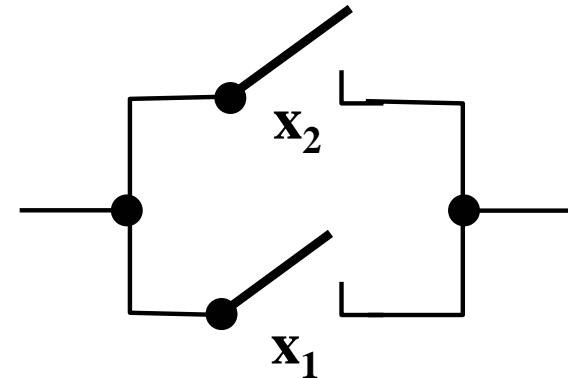
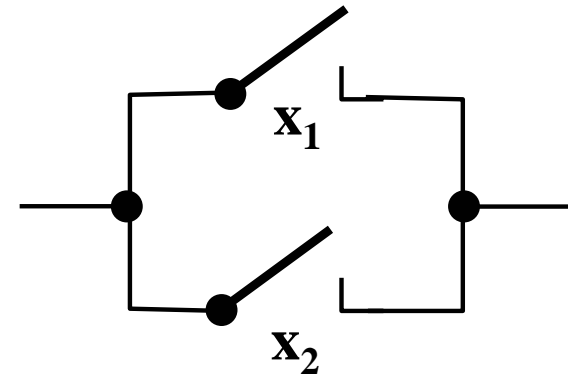
$$x_1 \text{ par } x_2 \in \{L, H\}$$

# Schaltalgebra

## H1: Kommutativgesetze



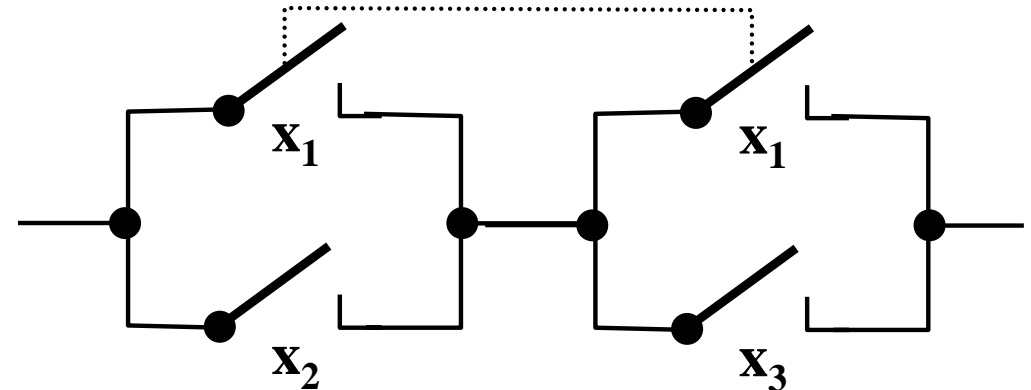
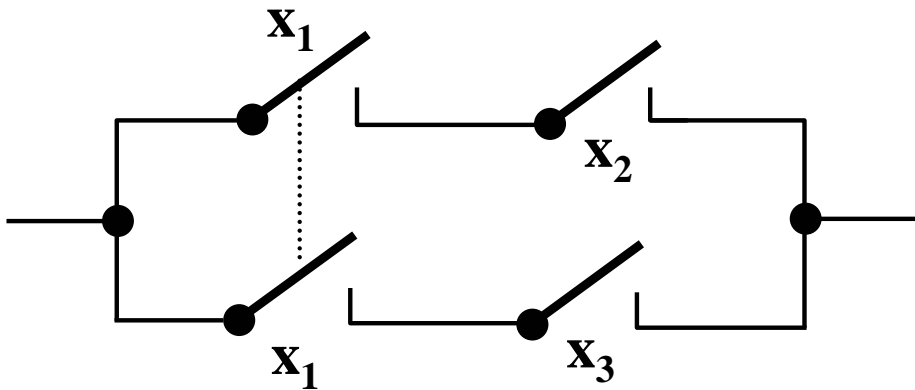
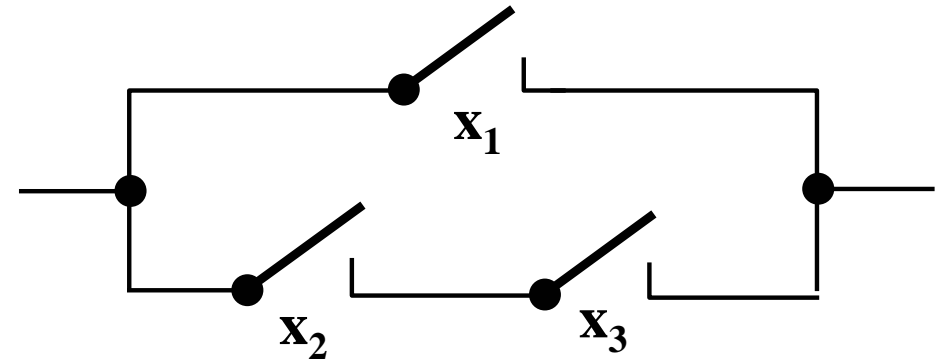
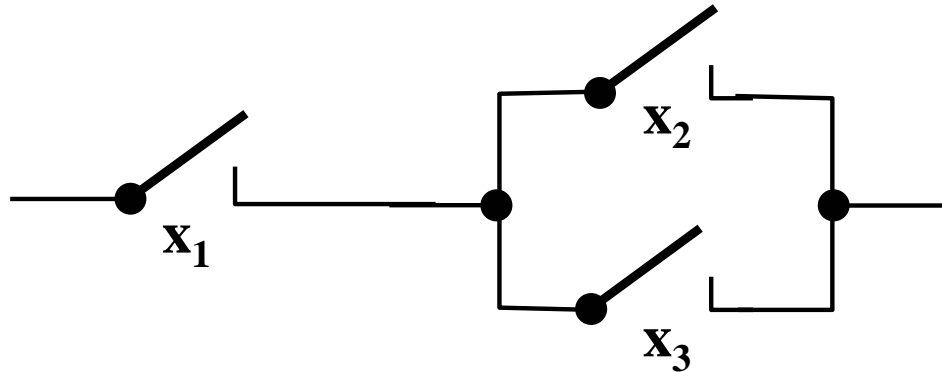
$$x_1 \text{ ser } x_2 = x_2 \text{ ser } x_1$$



$$x_1 \text{ par } x_2 = x_2 \text{ par } x_1$$

# Schaltalgebra

## H2: Distributivgesetz

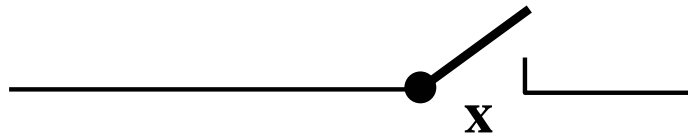
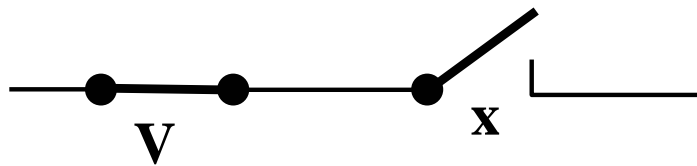


$$x_1 \text{ ser } (x_2 \text{ par } x_3) = \\ (x_1 \text{ ser } x_2) \text{ par } (x_1 \text{ ser } x_3)$$

$$x_1 \text{ par } (x_2 \text{ ser } x_3) = \\ (x_1 \text{ par } x_2) \text{ ser } (x_1 \text{ par } x_3)$$

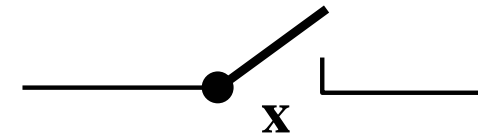
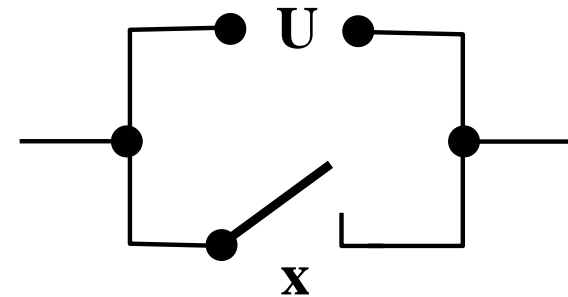
# Schaltalgebra

## H3: Neutrale Elemente



$$x \text{ ser } V = x$$

V: Dauernde Verbindung

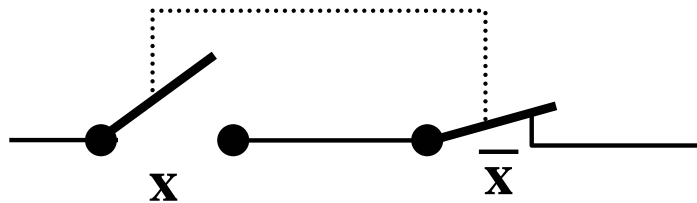


$$x \text{ par } U = x$$

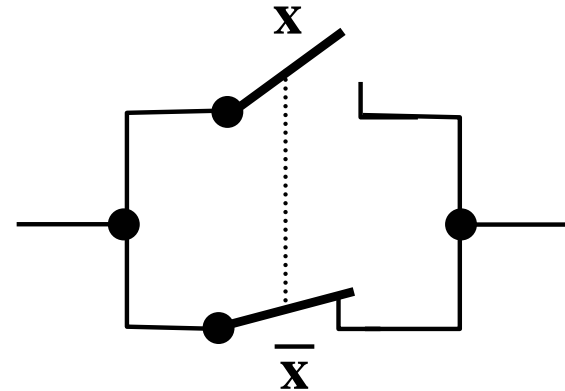
U: Dauernde Unterbrechung

# Schaltalgebra

## H4: Inverse Elemente



$$x \text{ ser } \bar{x} = U$$



$$x \text{ par } \bar{x} = V$$

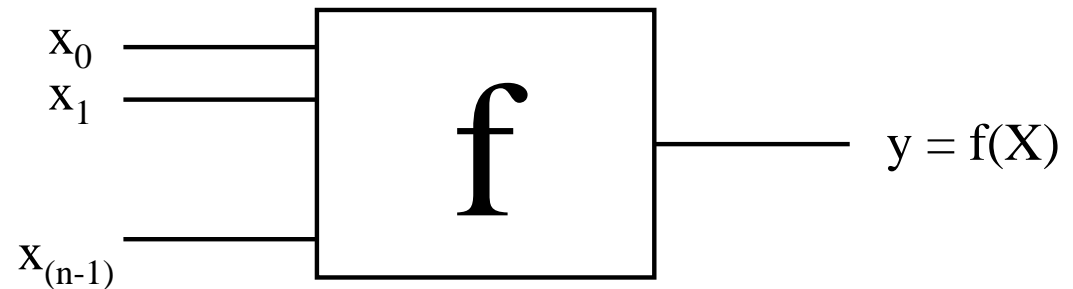
Voraussetzung: Ideales, gleichzeitiges Schalten



# Boolesche Funktionen

## Binäre Funktionen binärer Variablen

$$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$



**n** unabhängige Eingangsvariablen:  $x_i \in \{0,1\} \quad i = 0, \dots, n-1$

$2^n$  spezielle Eingangsbelegungen:  $B_i \in \{0,1\}^n \quad i = 0, \dots, 2^n-1$

**1** abhängige Ausgangsvariable:  $y \in \{0,1\}$

**n** Eingangsvariablen  $\Rightarrow 2^{2^n}$  Funktionen



# Aufgabe 1

Beweisen Sie die beiden Idempotenzgesetze:

- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a}$

- $\mathbf{a} \vee \mathbf{a} = \mathbf{a}$

$$\begin{aligned} a \wedge a &\stackrel{H3}{=} (a \wedge a) \vee n \\ &\stackrel{H4}{=} (a \wedge a) \vee (a \wedge \bar{a}) \\ &\stackrel{H2}{=} a \wedge (a \vee \bar{a}) \\ &\stackrel{H4}{=} a \wedge e \\ &\stackrel{H3}{=} a \end{aligned}$$

g.e.d.

$$H3: \quad x \vee n = x$$

$$H4: \quad x \wedge \bar{x} = n$$

$$H4: \quad x \vee \bar{x} = e$$

$$H3: \quad x \wedge e = x$$



# Aufgabe 1

## Dualitätprinzip:

Man ersetze:  $\vee \leftrightarrow \wedge$        $0 \leftrightarrow 1$

Man belasse:  $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{a}$        $\bar{\mathbf{a}} \leftrightarrow \bar{\mathbf{a}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} & \stackrel{\text{H3}}{=} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}) \vee 0 \\ & \stackrel{\text{H4}}{=} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}) \vee (\mathbf{a} \wedge \bar{\mathbf{a}}) \\ & \stackrel{\text{H2}}{=} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \bar{\mathbf{a}}) \\ & \stackrel{\text{H4}}{=} \mathbf{a} \wedge 1 \\ & \stackrel{\text{H3}}{=} \mathbf{a} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \vee \mathbf{a} & \stackrel{\text{H3}}{=} (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge 1 \\ & \stackrel{\text{H4}}{=} (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{a} \vee \bar{\mathbf{a}}) \\ & \stackrel{\text{H2}}{=} \mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \bar{\mathbf{a}}) \\ & \stackrel{\text{H4}}{=} \mathbf{a} \vee 0 \\ & \stackrel{\text{H3}}{=} \mathbf{a} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$



# Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{a \vee b} = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array} \right\} \Rightarrow b = c$$

Vorr.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} b &\stackrel{\text{Absorp.}}{=} b(b \vee a) \stackrel{H1}{=} b(a \vee b) \stackrel{\text{Vorr.}}{=} b(a \vee c) \\ &\stackrel{H2}{=} (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \stackrel{H1}{=} (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \\ &\stackrel{\text{Vorr.}}{=} (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \stackrel{H2}{=} (a \vee b) \wedge c \\ &\stackrel{\text{Vorr.}}{=} a \vee c \end{aligned}$$



# Aufgabe 3

$$ab\bar{c} \vee \bar{b}c$$

Die folgende Boolesche Funktion soll in eine disjunktive Form nach den Variablen **a**, **b**, **c** und **d** in dieser Reihenfolge entwickelt werden, jedoch höchstens solange, bis die Restfunktionen nur noch aus einer Variablen bestehen.

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c}\bar{d} \vee a b) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})$$

Entwickeln Sie  $f(d,c,b,a)$  schrittweise. Vereinfachen Sie die jeweils gefundenen Restfunktionen nur mit folgenden Regeln:



# Aufgabe 3

- Idempotenzgesetz:  $\mathbf{a} \vee \mathbf{a} = \mathbf{a}$        $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- Rechenregeln für logische Ausdrücke mit Konstanten:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1} \vee \mathbf{a} = \mathbf{1} & \mathbf{0} \vee \mathbf{a} = \mathbf{a} & \mathbf{a} \vee \mathbf{a} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0} & \mathbf{1} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} & \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\mathbf{f(d,c,b,a)} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}} \vee \mathbf{a} \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{c}} \vee \overline{\mathbf{d}})$$

**Shannonscher Entwicklungssatz:**

$$\mathbf{f(x_1, \dots, x_n)} = \left( \mathbf{x_i} \wedge \mathbf{f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{1}, x_{i+1}, \dots, x_n)} \right) \vee \left( \overline{\mathbf{x_i}} \wedge \mathbf{f(x_1, \dots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1}, \dots, x_n)} \right)$$



# Aufgabe 3

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d} \vee ab) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d})$$

Entwicklung nach a:

$$f(d,c,b,a) = a \wedge \left[ \underbrace{(1 \vee b)}_{=1} \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d} \vee \underbrace{1 \cdot b}_b) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d}) \right] \vee \bar{a} \wedge \left[ \underbrace{(0 \vee b)}_b \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d} \vee \underbrace{0 \cdot b}_0) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d}) \right]$$

$$= a \left[ \overline{c \vee d} \vee (\overline{c} \overline{d} \vee b) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d}) \right] \vee$$

$$\bar{a} \left[ b \wedge (\overline{c \vee d}) \vee \overline{c} \overline{d} \wedge (\overline{c} \vee \overline{d}) \right]$$

# Aufgabe 3

---

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d} \vee ab) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d})$$

Entwicklung nach a:

$$\begin{aligned} f(d,c,b,a) &= (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d} \vee ab) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d}) \\ &= a [(1 \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d} \vee 1b) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d})] \vee \\ &\quad \overline{a} [(0 \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d} \vee 0b) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d})] \\ &= a [\underbrace{(\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d} \vee b) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d})}_{\text{Restfunktion}}] \vee \\ &\quad \overline{a} [\underbrace{(b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c} \overline{d}) \wedge (\overline{c} \vee \overline{d})}_{\text{Restfunktion}}] \end{aligned}$$

Restfunktionen nach b entwickeln:



# Aufgabe 3

$$\begin{aligned} &= \mathbf{a} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}} \vee \mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \vee \\ &\quad \mathbf{\bar{a}} [ (\mathbf{b}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \\ &= \mathbf{a} \mathbf{b} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}} \vee \mathbf{1}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \vee \\ &\quad \mathbf{a} \mathbf{\bar{b}} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}} \vee \mathbf{0}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \vee \\ &\quad \mathbf{\bar{a}} \mathbf{b} [ (\mathbf{1}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \vee \\ &\quad \mathbf{\bar{a}} \mathbf{\bar{b}} [ (\mathbf{0}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \\ &= \mathbf{a} \mathbf{b} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \vee \\ &\quad \mathbf{a} \mathbf{\bar{b}} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \vee \\ &\quad \mathbf{\bar{a}} \mathbf{b} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \vee \\ &\quad \mathbf{\bar{a}} \mathbf{\bar{b}} [ (\overline{\mathbf{c} \mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ] \end{aligned}$$

# Aufgabe 3

Restfunktionen nach c entwickeln:

$$= \mathbf{a b} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee$$

$$\mathbf{a \bar{b}} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c}} \overline{\mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee$$

$$\overline{\mathbf{a}} \mathbf{b} [ (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{c}} \overline{\mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee$$

$$\overline{\mathbf{a}} \overline{\mathbf{b}} [ (\overline{\mathbf{c}} \overline{\mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{c} \vee \mathbf{d}}) ]$$

$$= \mathbf{a b c} [ (\overline{\mathbf{1} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{1}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee \mathbf{a b \bar{c}} [ (\overline{\mathbf{0} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{0}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee$$

$$\mathbf{a \bar{b} c} [ (\overline{\mathbf{1} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{1}} \overline{\mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{1}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee$$

$$\mathbf{a \bar{b} \bar{c}} [ (\overline{\mathbf{0} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{0}} \overline{\mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{0}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee$$

$$\overline{\mathbf{a}} \mathbf{b c} [ (\overline{\mathbf{1} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{1}} \overline{\mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{1}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee$$

$$\overline{\mathbf{a}} \mathbf{b \bar{c}} [ (\overline{\mathbf{0} \vee \mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{0}} \overline{\mathbf{d}}) \wedge (\overline{\mathbf{0}} \vee \overline{\mathbf{d}}) ] \vee$$

$$\overline{\mathbf{a}} \overline{\mathbf{b}} \mathbf{c} [ (\overline{\mathbf{1}} \overline{\mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{1} \vee \mathbf{d}}) ] \vee \overline{\mathbf{a}} \overline{\mathbf{b}} \overline{\mathbf{c}} [ (\overline{\mathbf{0}} \overline{\mathbf{d}}) \vee (\overline{\mathbf{0} \vee \mathbf{d}}) ]$$



# Aufgabe 3

---

$$f(d,c,b,a) = a b c \bar{d} \vee a b \bar{c} \underline{1} \vee \cancel{a \bar{b} c 0} \vee a \bar{b} \bar{c} \bar{d} \vee \cancel{\bar{a} b c 0} \vee \bar{a} b \bar{c} \bar{d} \vee \cancel{\bar{a} \bar{b} c 0} \vee \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d}$$

$$f(d,c,b,a) = a b c \bar{d} \vee a b \bar{c} (d \vee \bar{d}) \vee a \bar{b} \bar{c} \bar{d} \vee \bar{a} b \bar{c} \bar{d} \vee \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d}$$

Disjunktive Normalform:

$$f(d,c,b,a) = a b c \bar{d} \vee a b \bar{c} d \vee a b \bar{c} \bar{d} \vee a \bar{b} \bar{c} \bar{d} \vee \bar{a} b \bar{c} \bar{d} \vee \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d}$$

# Dualitätsprinzip

## Dualitätprinzip:

Man ersetze:  $\vee \leftrightarrow \wedge$        $0 \leftrightarrow 1$

Man belasse:  $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{a}$        $\bar{\mathbf{a}} \leftrightarrow \bar{\mathbf{a}}$

## Shannonscher Entwicklungssatz:

Disjunktive Form:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee [\bar{x}_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)]$$

Konjunktive Form:

$$f(x_1, \dots, x_n) = [x_i \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)] \wedge [\bar{x}_i \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)]$$



# Aufgabe 4

Die folgende Boolesche Funktion soll in eine konjunktive Form entwickelt werden:

$$f(c,b,a) = (a \vee b) \leftrightarrow (c \vee (a \leftrightarrow c))$$

$$c\bar{0} \vee \bar{c} \cdot 0$$

$$\begin{aligned} &= a \vee \left[ \underbrace{(c \vee b)}_b \leftrightarrow \left( c \vee \underbrace{(0 \leftrightarrow c)}_c \right) \right] \wedge \\ &\quad \bar{a} \vee \left[ \underbrace{(1 \vee b)}_1 \leftrightarrow \left( c \vee \underbrace{(1 \leftrightarrow c)}_{\bar{c}} \right) \right] \\ &= \left\{ a \vee [b \leftrightarrow c] \right\} \wedge \left\{ \underbrace{\bar{a} \vee 1}_1 \right\} \\ &= [a \vee (b \leftrightarrow c)] \end{aligned}$$



b	a	$\leftrightarrow$	$\nleftrightarrow$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

DNF:  $\bar{b}\bar{a} \vee ba$

KNF:  $(b\bar{v}\bar{a}) \wedge (\bar{b}va)$

$\leftrightarrow$

DNF:  $\bar{b}a \vee b\bar{a}$

KNF:  $(\bar{b}va) \wedge (b\bar{v}\bar{a})$

---

$$a \vee (b \oplus c)$$

$$\begin{aligned} b \oplus c &= [b \wedge (0 \oplus c)] \vee [\bar{b} \wedge (1 \oplus c)] \\ &= [b \wedge \bar{c}] \vee [\bar{b} \wedge c] \end{aligned}$$

$$\Downarrow f = a \vee ((b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c))$$

$$\begin{aligned} f(c, b, a) &= (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \\ &= \text{MAXt}(4, 2) \end{aligned}$$

# Aufgabe 5: "Farmer's Dilemma"

---

Farmer, Wolf, Ziege und ein Kohlkopf befinden sich auf einer Flussseite. Der Farmer besitzt ein Boot, welches ihn selbst sowie einen weiteren Gegenstand trägt. Er möchte nun mit allen Gütern auf die andere Seite des Flusses gelangen. Unglücklicherweise frisst der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf, wenn er diese unbeaufsichtigt lässt. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass die Überfahrt keine Zeit benötigt, der Bauer also entweder am linken oder am rechten Ufer ist.

Damit nun der Bauer nicht versehentlich Wolf und Ziege bzw. Ziege und Kohl allein lässt, soll ein Warnsystem aufgebaut werden, welches in diesen Fällen Alarm auslöst.

Die Buchstaben **f**, **w**, **z**, und **k** bezeichnen Farmer, Wolf, Ziege und den Kohlkopf. Ist der Wert einer solchen Variablen **0** (**1**), dann befindet sich der entsprechende Gegenstand auf der **linken** (**rechten**) Flussseite.

- Geben Sie die Funktionstabelle der Alarmfunktion **a (f,w,z,k)** an



# Lösung

Funktionstabelle:

f	w	z	k	a
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

• DNF?

• KNF ?

• Dilemma-Lösung ?



# DNF: Farmer's Dilemma

f	w	z	k	a
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
→ 0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$\begin{aligned}
 a(f, w, z, k) &= \text{MINT}(3, 6, 7, 8, 9, 12) \\
 &= \bar{f}\bar{w}zk \vee \bar{f}wz\bar{k} \vee \bar{f}wzk \vee \\
 &\quad f\bar{w}\bar{z}\bar{k} \vee f\bar{w}\bar{z}k \vee f\bar{w}z\bar{k}
 \end{aligned}$$



# KNF: Farmer's Dilemma

f	w	z	k	a
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$\begin{aligned}
 a(f, w, z, k) &= \text{MAXt}(0, 1, 2, 4, 5, 10, 11, \\
 &\quad 13, 14, 15) \\
 &= (f \vee w \vee z \vee k) \wedge (f \vee w \vee z \vee \bar{k}) \wedge \dots \\
 &\quad (\bar{f} \vee \bar{w} \vee \bar{z} \vee k) \wedge (\bar{f} \vee \bar{w} \vee \bar{z} \vee \bar{k})
 \end{aligned}$$



# Aufgabe 6

Bestimmen Sie die beiden Normalformen der Schaltfunktion  
 $f(c,b,a) = \bar{c} \vee b \bar{a}$

c	b	a	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	



# Aufgabe 6

Bestimmen Sie die beiden Normalformen der Schaltfunktion  
 $f(c,b,a) = \bar{c} \vee b \bar{a}$

c	b	a	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	



# Aufgabe 7

---

Es soll eine Notstop-Schaltung für einen mobilen Roboter realisiert werden. Der Roboter hat drei Sensoren, die drohende Kollisionen mit Hindernissen erkennen. Der Roboter darf weiterfahren, wenn mindestens zwei Sensoren keine Kollisionsgefahr melden.

- Geben Sie die Schaltfunktion der Schaltung in disjunktiver Normalform an
- Vereinfachen Sie die DNF soweit wie möglich



# Aufgabe 7

$S_1 = 0$   
 $S_1 = 1$  Gefahr

$S_2$	$S_1$	$S_0$	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

DNF:

$$f(S_2, S_1, S_0) = \text{MINT}(3, 5, 6, 7)$$

$$= \bar{S}_2 S_1 S_0 \vee S_2 \bar{S}_1 S_0 \vee \underbrace{S_2 S_1 \bar{S}_0} \vee \underbrace{S_2 S_1 S_0}$$

$$= \bar{S}_2 S_1 S_0 \vee S_2 \bar{S}_1 S_0 \vee S_2 S_1$$

$$= (S_2 S_1 \vee S_2 \bar{S}_1) S_0 \vee S_2 S_1$$





# Aufgabe 8

---

## Funktionstabelle

$a_i$	$b_i$	$c_{in}$	$s_i$	$c_{out}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



# Aufgabe 8

DNF von  $s_i$ :

$a_i$	$b_i$	$c_{in}$	$s_i$	$c_{out}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$s_i(a_i, b_i, c_{in}) = \text{MINT}(1, 2, 4, 7)$$

$$= \bar{a}_i \bar{b}_i c_{in} \vee \bar{a}_i b_i \bar{c}_{in} \vee a_i \bar{b}_i \bar{c}_{in} \vee a_i b_i c_{in}$$



# Aufgabe 8

KNF von  $c_{out}$

$a_i$	$b_i$	$c_{in}$	$s_i$	$c_{out}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\begin{aligned} c_{out}(a_i, b_i, c_{in}) &= \text{MAX}(0, 1, 3, 4) \\ &= (a_i \vee b_i \vee c_{in})(a_i \vee b_i \vee \bar{c}_{in}) \\ &\quad (a_i \vee \bar{b}_i \vee c_{in})(\bar{a}_i \vee b_i \vee c_{in}) \end{aligned}$$

