

## 2. Übung

- Boolesche Algebra (2. Aufgaben)
- Shannonscher Entwicklungssatz (2 Aufgaben)
- Boolesche Funktionen: (4 Aufgaben)
  - DNF, KNF
  - DMF, KMF

Verknüpfungsgebilde:  $BA = [V, \oplus, \otimes]$

Mengenalgebra (MA)

Boolesche Algebra (BA)

$P(M)$

$V$

$S \in P(M)$  oder  $S \subseteq M$

$a \in V$

$\bar{S}$

$\bar{a}$

Operatoren:  $\cap, \cup$

Operatoren:  $\oplus, \otimes$

Bezugsmenge:  $M \in P(M)$

Einselement:  $e \in V$

Leere Menge:  $\emptyset \in P(M)$

Nullelement:  $n \in V$



## Schaltalgebra

Binäre Boolesche Algebra: **Abstraktion**

$$BA2 = [\{n, e\}, \otimes, \oplus]$$

Abstrakt

Schaltalgebra: **Interpretation**

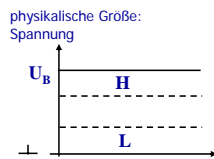
$$SA = [\{0, 1\}, \wedge, \vee]$$

Konjunktion    Disjunktion

## Schaltalgebra

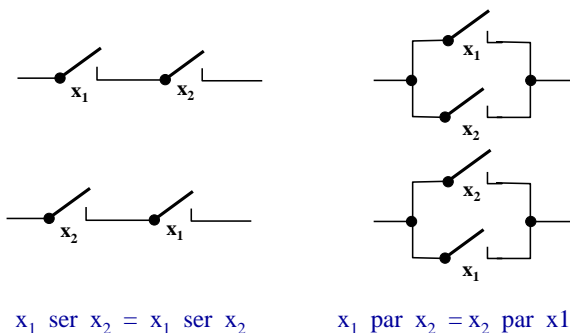


Zweiwertige Signaldarstellung:



## Schaltalgebra

H1: Kommutativgesetz



Verknüpfungsgebilde:

$BA = [V, \oplus, \otimes]$

Mengenalgebra (MA)

Boolesche Algebra (BA)

$P(M)$

$V$

$S \in P(M)$  oder  $S \subseteq M$

$a \in V$

$\bar{S}$

$\bar{a}$

Operatoren:  $\cap, \cup$

Operatoren:  $\oplus, \otimes$

Bezugsmenge:  $M \in P(M)$

Einselement:  $e \in V$

Leere Menge:  $\emptyset \in P(M)$

Nullelement:  $n \in V$



## Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra

H0.  $a \vee b \in \{0, 1\}$   
 $a \wedge b \in \{0, 1\}$

H1.  $a \vee b = b \vee a$   
 $a \wedge b = b \wedge a$

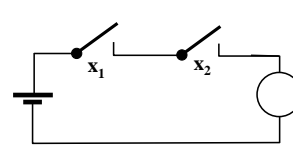
H2.  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$   
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

H3.  $a \wedge 1 = a$   
 $a \vee 0 = a$

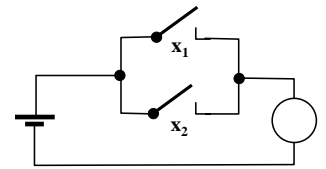
H4.  $a \wedge \bar{a} = 0$   
 $a \vee \bar{a} = 1$

## Schaltalgebra

Operationen:



Serienschaltung (ser)



Parallelschaltung (par)

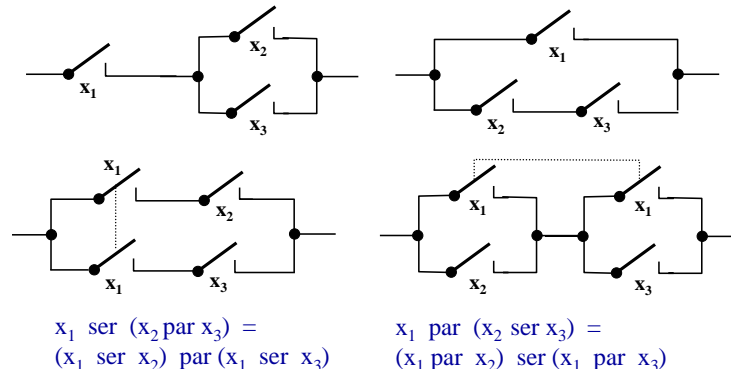
H0: Abgeschlossenheit

$$x_1 \text{ ser } x_2 \in \{L, H\}$$

$$x_1 \text{ par } x_2 \in \{L, H\}$$

## Schaltalgebra

H2: Distributivgesetz



## H3: Neutrale Elemente



$$x \text{ ser } V = x$$

V: Dauernde Verbindung

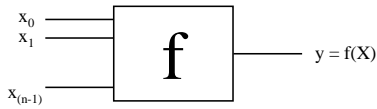
$$x \text{ par } U = x$$

U: Dauernde Unterbrechung

## Boolesche Funktionen

### Binäre Funktionen binärer Variablen

$$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$



n unabhängige Eingangsvariablen:  $x_i \in \{0,1\}$   $i = 0, \dots, n-1$

$2^n$  spezielle Eingangsbelegungen:  $B_i \in \{0,1\}^n$   $i = 0, \dots, 2^n-1$

1 abhängige Ausgangsvariable:  $y \in \{0,1\}$

n Eingangsvariablen  $\Rightarrow 2^{2^n}$  Funktionen

## Aufgabe 1

### Dualitätsprinzip:

Man ersetze:  $\vee \leftrightarrow \wedge$        $0 \leftrightarrow 1$

Man belasse:  $a \leftrightarrow a$        $\bar{a} \leftrightarrow \bar{a}$

$$\begin{aligned} a \wedge a &\stackrel{H3}{=} (a \wedge a) \vee 0 \\ &\stackrel{H4}{=} (a \wedge a) \vee (a \wedge \bar{a}) \\ &\stackrel{H2}{=} a \wedge (a \vee \bar{a}) \\ &\stackrel{H4}{=} a \wedge 1 \\ &\stackrel{H3}{=} a \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \vee a &\stackrel{H3}{=} (a \vee a) \wedge 1 \\ &\stackrel{H4}{=} (a \vee a) \wedge (a \vee \bar{a}) \\ &\stackrel{H2}{=} a \vee (a \wedge \bar{a}) \\ &\stackrel{H4}{=} a \vee 0 \\ &\stackrel{H3}{=} a \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

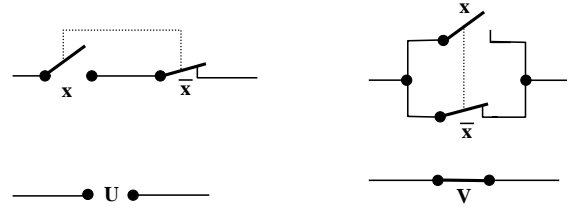
## Aufgabe 3 $ab\bar{c} \vee \bar{b}c$

Die folgende Boolesche Funktion soll in eine disjunktive Form nach den Variablen **a, b, c** und **d** in dieser Reihenfolge entwickelt werden, jedoch höchstens solange, bis die Restfunktionen nur noch aus einer Variablen bestehen.

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c} \bar{d} \vee a b) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})$$

Entwickeln Sie  $f(d,c,b,a)$  schrittweise. Vereinfachen Sie die jeweils gefundenen Restfunktionen nur mit folgenden Regeln:

## H4: Inverse Elemente



$$x \text{ ser } \bar{x} = U$$

$$x \text{ par } \bar{x} = V$$

Voraussetzung: Ideales, gleichzeitiges Schalten

## Aufgabe 1

Beweisen Sie die beiden Idempotenzgesetze:

- $a \wedge a = a$
- $a \vee a = a$

$$\begin{aligned} a \wedge a &\stackrel{H3}{=} (a \wedge a) \vee n \\ &\stackrel{H4}{=} (a \wedge a) \vee (a \wedge \bar{a}) \\ &\stackrel{H2}{=} a \wedge (a \vee \bar{a}) \\ &\stackrel{H4}{=} a \wedge e \\ &\stackrel{H3}{=} a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H3: & x \vee n = x \\ H4: & x \wedge \bar{x} = n \\ H4: & x \vee \bar{x} = e \\ H3: & x \wedge e = x \end{aligned}$$

g.e.d.

## Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{array} \right\} \Rightarrow b = c$$

*Vorr.*

$$\begin{aligned} \text{Beweis:} \quad b &\stackrel{\text{Absorp.}}{=} b(b \vee a) \stackrel{H1}{=} b(a \vee b) \stackrel{\text{Vorr.}}{=} b(a \vee c) \\ &\stackrel{H2}{=} (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \stackrel{H1}{=} (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \\ &\stackrel{\text{Vorr.}}{=} (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \stackrel{H2}{=} (a \vee b) \wedge c \\ &\stackrel{\text{Vorr.}}{=} a \vee c \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

- Idempotenzgesetz:  $a \vee a = a$        $a \wedge a = a$
- Rechenregeln für logische Ausdrücke mit Konstanten:

$$\begin{array}{lll} 1 \vee a = 1 & 0 \vee a = a & a \vee a = 1 \\ 0 \wedge a = 0 & 1 \wedge a = a & a \wedge a = 0 \end{array}$$

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\bar{c} \bar{d} \vee a b) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})$$

Shannonscher Entwicklungssatz:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right) \vee \left( \bar{x}_1 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{0}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right)$$

## Aufgabe 3

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d} \vee ab) \wedge (\overline{c \vee d})$$

Entwicklung nach a:

$$\begin{aligned} f(d,c,b,a) &= a \wedge [(1 \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d} \vee 1 \cdot b) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} \wedge [(0 \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d} \vee 0 \cdot b) \wedge (\overline{c \vee d})] \\ &= a [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d} \vee b) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} [b \wedge (\overline{c \vee d}) \vee \overline{c \vee d} \wedge (\overline{c \vee d})] \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

$$\begin{aligned} &= a [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d} \vee b) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} [(b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \\ &= a b [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d} \vee 1) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad a \overline{b} [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d} \vee 0) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} b [(1) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} \overline{b} [(0) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \\ &= a b [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad a \overline{b} [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} b [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} \overline{b} [(\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

$$f(d,c,b,a) = a b c \overline{d} \vee a b \overline{c} \overline{d} \vee a \overline{b} c \overline{d} \vee a \overline{b} \overline{c} \overline{d} \vee \overline{a} b c \overline{d} \vee \overline{a} b \overline{c} \overline{d} \vee \overline{a} \overline{b} c \overline{d} \vee \overline{a} \overline{b} \overline{c} \overline{d}$$

$$f(d,c,b,a) = a b c \overline{d} \vee a b \overline{c} (\overline{d \vee d}) \vee a \overline{b} \overline{c} \overline{d} \vee \overline{a} b c \overline{d} \vee \overline{a} b \overline{c} \overline{d}$$

Disjunktive Normalform:

$$f(d,c,b,a) = a b c \overline{d} \vee a b \overline{c} \overline{d} \vee a \overline{b} \overline{c} \overline{d} \vee a \overline{b} \overline{c} \overline{d} \vee \overline{a} b c \overline{d} \vee \overline{a} b \overline{c} \overline{d}$$

## Aufgabe 4

Die folgende Boolesche Funktion soll in eine konjunktive Form entwickelt werden:

$$f(c,b,a) = (a \vee b) \leftrightarrow (c \vee (a \leftrightarrow c))$$

$$\begin{aligned} &= a \vee [(0 \vee b) \leftrightarrow (c \vee (0 \leftrightarrow c))] \wedge \\ &\quad \overline{a} \vee [(1 \vee b) \leftrightarrow (c \vee (1 \leftrightarrow c))] \\ &= \{a \vee [b \leftrightarrow c]\} \wedge \{\overline{a} \vee 1\} \\ &= [a \vee (b \leftrightarrow c)] \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

$$f(d,c,b,a) = (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d} \vee ab) \wedge (\overline{c \vee d})$$

Entwicklung nach a:

$$\begin{aligned} f(d,c,b,a) &= (a \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d} \vee ab) \wedge (\overline{c \vee d}) \\ &= a [(1 \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d} \vee 1 \cdot b) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} [(0 \vee b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d} \vee 0 \cdot b) \wedge (\overline{c \vee d})] \\ &= a [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d} \vee b) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} [(b) \wedge (\overline{c \vee d}) \vee (\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \end{aligned}$$

Restfunktionen nach b entwickeln:

## Aufgabe 3

Restfunktionen nach c entwickeln:

$$\begin{aligned} &= a b [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad a \overline{b} [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} b [(c \vee d) \vee (\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} \overline{b} [(\overline{c \vee d}) \wedge (\overline{c \vee d})] \\ &= a b c [(1 \vee d) \vee (\overline{1 \vee d})] \vee a b \overline{c} [(0 \vee d) \vee (\overline{0 \vee d})] \vee \\ &\quad a \overline{b} c [(1 \vee d) \vee (\overline{1 \vee d}) \wedge (\overline{1 \vee d})] \vee \\ &\quad a \overline{b} \overline{c} [(0 \vee d) \vee (\overline{0 \vee d}) \wedge (\overline{0 \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} b c [(1 \vee d) \vee (\overline{1 \vee d}) \wedge (\overline{1 \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} b \overline{c} [(0 \vee d) \vee (\overline{0 \vee d}) \wedge (\overline{0 \vee d})] \vee \\ &\quad \overline{a} \overline{b} c [(\overline{1 \vee d}) \vee (\overline{1 \vee d})] \vee \overline{a} \overline{b} \overline{c} [(\overline{0 \vee d}) \vee (\overline{0 \vee d})] \end{aligned}$$

## Dualitätsprinzip

Dualitätsprinzip:

Man ersetze:  $\vee \leftrightarrow \wedge$        $0 \leftrightarrow 1$

Man belasse:  $a \leftrightarrow a$        $\overline{a} \leftrightarrow \overline{a}$

Shannonscher Entwicklungssatz:

Disjunktive Form:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee \overline{x_1} \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Konjunktive Form:

$$f(x_1, \dots, x_n) = [x_1 \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)] \wedge [\overline{x_1} \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)]$$

b	a	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$DNF: \overline{b} \overline{a} \vee b a$$

$$KNF: (b \vee \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee a)$$

$\leftrightarrow$

$$DNF: \overline{b} \overline{a} \vee b a$$

$$KNF: (b \vee \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee a)$$

## Aufgabe 5: "Farmer's Dilemma"

Farmer, Wolf, Ziege und ein Kohlkopf befinden sich auf einer Flussseite. Der Farmer besitzt ein Boot, welches ihn selbst sowie einen weiteren Gegenstand trägt. Er möchte nun mit allen Gütern auf die andere Seite des Flusses gelangen. Unglücklicherweise frisst der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf, wenn er diese unbeaufsichtigt lässt. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass die Überfahrt keine Zeit benötigt, der Bauer also entweder am linken oder am rechten Ufer ist.

Damit nun der Bauer nicht versehentlich Wolf und Ziege bzw. Ziege und Kohl allein lässt, soll ein Warnsystem aufgebaut werden, welches in diesen Fällen Alarm auslöst.

Die Buchstaben **f**, **w**, **z**, und **k** bezeichnen Farmer, Wolf, Ziege und den Kohlkopf. Ist der Wert einer solchen Variablen **0** (**1**), dann befindet sich der entsprechende Gegenstand auf der **linken** (**rechten**) Flussseite.

- Geben Sie die Funktionstabelle der Alarmfunktion **a(f,w,z,k)** an

$$\begin{aligned}
 a &= (b \oplus c) \\
 b \oplus c &= [b \wedge (0 \oplus c)] \vee [\bar{b} \wedge (1 \oplus c)] \\
 &= [b \wedge \bar{c}] \vee [\bar{b} \wedge c] \\
 \downarrow f &= a \vee ((b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c)) \\
 f(c,b,a) &= (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \\
 &= \text{NAND}(4, 2)
 \end{aligned}$$

## Lösung

Funktionstabelle:

f	w	z	k	a
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

• DNF?  
• KNF?  
• Dilemma-Lösung?

## KNF: Farmer's Dilemma

f	w	z	k	a
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$\begin{aligned}
 a(f,w,z,k) &= \text{NAND}(0, 1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 15) \\
 &= (f \vee w \vee z \vee k) \wedge (f \vee w \vee z \vee \bar{k}) \wedge \dots \\
 &\quad (\bar{f} \vee \bar{w} \vee \bar{z} \vee k) \wedge (\bar{f} \vee \bar{w} \vee z \vee \bar{k})
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 6

Bestimmen Sie die beiden Normalformen der Schaltfunktion **f(c,b,a) =  $\bar{c} \vee b \bar{a}$**

c	b	a	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

## Aufgabe 6

Bestimmen Sie die beiden Normalformen der Schaltfunktion **f(c,b,a) =  $\bar{c} \vee b \bar{a}$**

c	b	a	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

## Aufgabe 7

Es soll eine Notstop-Schaltung für einen mobilen Roboter realisiert werden. Der Roboter hat drei Sensoren, die drohende Kollisionen mit Hindernissen erkennen. Der Roboter darf weiterfahren, wenn mindestens zwei Sensoren keine Kollisionsgefahr melden.

- Geben Sie die Schaltfunktion der Schaltung in disjunktiver Normalform an
- Vereinfachen Sie die DNF soweit wie möglich

# Aufgabe 7

$s_i = 0$   
 $s_i = 1$  Gefahr

$s_2$	$s_1$	$s_0$	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

DNF:

$$\begin{aligned}
 F(s_2, s_1, s_0) &= \text{MINT}(3, 5, 6, 7) \\
 &= \bar{s}_2 s_1 s_0 \vee s_2 \bar{s}_1 s_0 \vee \underbrace{s_2 s_1 \bar{s}_0}_{s_2 s_1 s_0} \vee s_2 s_1 s_0 \\
 &= \bar{s}_2 s_1 s_0 \vee s_2 \bar{s}_1 s_0 \vee s_2 s_1 \\
 &= (s_2 s_1 \vee s_2 \bar{s}_1) s_0 \vee s_2 s_1
 \end{aligned}$$

# Aufgabe 8

Funktionstabelle

$a_i$	$b_i$	$c_{in}$	$s_i$	$c_{out}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

# Aufgabe 8

KNF von  $c_{out}$

$a_i$	$b_i$	$c_{in}$	$s_i$	$c_{out}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 c_{out}(a_i, b_i, c_{in}) &= \text{MINT}(0, 1, 3, 4) \\
 &= (a_i \vee b_i \vee c_{in})(a_i \vee b_i \vee \bar{c}_{in}) \\
 &\quad (a_i \vee \bar{b}_i \vee c_{in})(\bar{a}_i \vee b_i \vee c_{in})
 \end{aligned}$$

# Aufgabe 8

Es soll ein Schaltnetz entworfen werden, das die Summe von zwei Dualziffern  $a_i$  und  $b_i$  addiert und dabei den Übertrag  $c_{in}$  aus der vorhergehenden Stelle berücksichtigt. Ausgabevariablen sind die Summe  $s_i$  und der bei der Addition evtl. entstehende Übertrag  $c_{out}$

$$\begin{array}{r}
 \bar{a}_i \quad \bar{b}_i \quad b_0 \\
 \underline{a_{i-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0} \\
 s_0
 \end{array}$$

- Geben Sie die Funktionstabelle an
- Geben Sie die DNF von  $s_i$  an
- Geben Sie die KNF von  $c_{out}$  an

# Aufgabe 8

DNF von  $s_i$ :

$a_i$	$b_i$	$c_{in}$	$s_i$	$c_{out}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 s_i(a_i, b_i, c_{in}) &= \text{MINT}(1, 2, 4, 7) \\
 &= \bar{a}_i \bar{b}_i c_{in} \vee \bar{a}_i b_i \bar{c}_{in} \vee \\
 &\quad a_i \bar{b}_i \bar{c}_{in} \vee a_i b_i c_{in}
 \end{aligned}$$