Übung 1

- Darstellung negativer Zahlen
  - Addition von Zahlen in Zweierkomplement-Form
- Gleitkommazahlen
  - Zahlen im IEEE-754 Floating-Point-Standard
  - Addition von GK-Zahlen
  - Multiplikation von GK-Zahlen
- Hammingkode
  - 1-Bit-Fehlererkennung und –korrektur
  - 2-Bit-Fehlererkennung

Wichtig

Sei $z = b_{n-1} \ldots b_0$ eine n-stellige Dualzahl

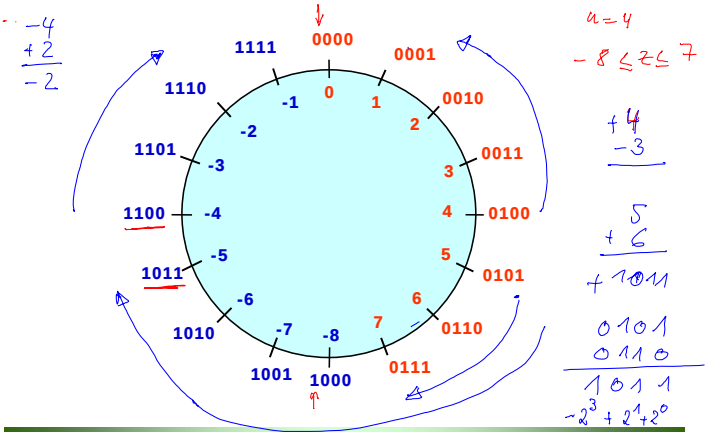
- Das Zweierkomplement einer n-stelligen Zahl z ist $2^n - z$
- Vorgegebene Wortlänge $n \rightarrow N = 2^n$ Zahlen
  - Darstellung einer positiven Zahl z: $+z = z$
  - Darstellung einer negativen Zahl $-z$: $-z = N - z$
  - Beispiel: n = 4 → N = 2^4 = 16, Darstellung von -5 ?

n = 4
1010 1001

16 − 5
11

0101
1010
1
1011

Zweierkomplement-Darstellung



−4
+2
−2

n = 4
−8 ≤ z ≤ 7

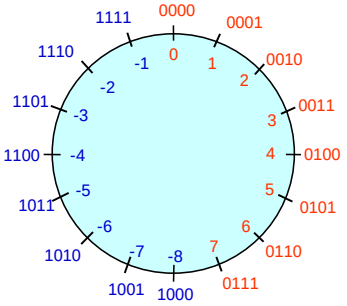
+4
−3

5
+6
+1011

0101
0110
1011
$-2^3 + 2^1 + 2^0$

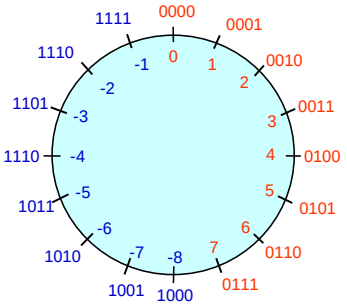
Addition von ZK-Zahlen

```
 1100   - 4
 0010   + 2
 ----------
 1110   - 2

 1110   - 2
 0100   + 4
 ----------
10010   + 2
```



Subtraktion von ZK-Zahlen

```
 0001   + 1
 1100   - 4
 ----------
 1101   - 3

 1111   - 1
 1100   - 4
 ----------
11011   - 5
```



y − x kann zurückgeführt werden auf:

$y + 2^n - x$

- $x < y$:

  $y + 2^n - x = 2^n + (y - x)$

  zuviel

  0011 +3
  1110 −2
  0001 +1

- $y < x$:

  $y + 2^n - x = 2^n - |y - x|$

  0010 +2
  1101 −3
  1111 −1

- $(-y) + (-x) = (2^n - y) + (2^n - x) = 2^n + \underbrace{2^n - (y + x)}$

−1
−3

Addition von Zweierkomplement-Zahlen (1)

Bei der Addition lassen sich 3 Fälle unterscheiden:

1) Beide Summanden sind positiv

- die Vorzeichenbits beider Zahlen sind 0.
- das Ergebnis muss positiv sein
- Das Ergebnis ist nur dann korrekt, wenn sein Vorzeichenbit gleich 0 ist, ansonsten wurde der Zahlenbereich überschritten.

Man kann sich diese Situation anhand des Zahlenkreises klarmachen.

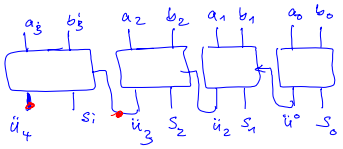
Beispiel 1

```
  5        0101
+ 2      + 0010
-------  --------
= 7      [00]00
          0111
```

Überträge gleich
Ergebnis korrekt

```
  5        0101
+ 6      + 0110
-------  --------
= 11     [01]00 –
          1011
```

Überträge ungleich
Überlauf
Ergebnis falsch



Addition von Zweierkomplement-Zahlen (2)

2) Beide Summanden sind negativ

- die Vorzeichenbits beider Zahlen haben den Wert 1.
- Das Ergebnis muss negativ sein.
- Das Ergebnis ist nur dann korrekt, wenn das Vorzeichenbit des Ergebnisses 1 ist.
- Die beiden vordersten Überträge müssen den gleichen Wert haben.

Beispiel 2

```
  -5        1011
+ (-2)    + 1110
-------   -------
= -7      11110
          1001
```

Überträge gleich
Ergebnis korrekt

```
  -5        1011
+ (-6)    + 1010
-------   -------
= -11     10110
          0101
```

Überträge ungleich
Überlauf
Ergebnis falsch

Addition von Zweierkomplement-Zahlen (3)

3) Summanden haben unterschiedliche Vorzeichen:

- Das Ergebnis ist auf jeden Fall korrekt, das Vorzeichen hängt davon ab, ob Subtrahend oder Minuend betragsmäßig größer ist
- Der Übertrag aus der vordersten Stelle ist zu streichen

Beispiel 3

```
   5        0101
+ (-6)    + 1010
-------   -------
= -1      00000
          1111
```

Überträge gleich
Ergebnis korrekt

```
  -5        1011
+  6      + 0110
-------   -------
=  1      11110
          0001
```

Überträge gleich
Ergebnis korrekt

Überlauferkennung

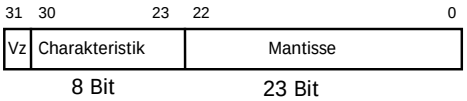
Allgemeine Überlauferkennung bei dualer Addition:

- **korrekte Addition:** beide Überträge sind gleich.
- **Überlauf:** beide Überträge sind ungleich.

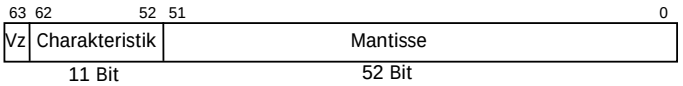
  Realisierung z. B. durch ein Antivalenzgatter

IEEE-P 754-Floating-Point-Standard

32-Bit Maschinenformate des IEEE-Standards:



64-Bit Maschinenformate des IEEE-Standards:



Zusammenfassung des 32-Bit-IEEE-Formats

Charakteristik	Zahlenwert
0	$(-1)^{Vz}\ 0{,}Mantisse \cdot 2^{-126}$
1	$(-1)^{Vz}\ 1{,}Mantisse \cdot 2^{-126}$
...	$(-1)^{Vz}\ 1{,}Mantisse \cdot 2^{Charakteristik-127}$
254	$(-1)^{Vz}\ 1{,}Mantisse \cdot 2^{127}$
255	$Mantisse = 0$: $(-1)^{Vz}\ \infty$ overflow
255	$Mantisse \neq 0$: NaN (not a number)

$Exp_{min} \leq Exp \leq Exp_{max}$ $\qquad$ $-126 \leq Exp \leq 127$

IEEE-P 754 Format

$Exp = Exp_{min} = -126 \Rightarrow Char = Exp + 127 = 1$

0000 0000 1000 0000 ··· 0000 $= (1{,}0\cdots00)_2 \cdot 2^{-126}$ = ***minreal***

0000 0000 1000 0000 ··· 0001 $= (1{,}0\cdots01)_2 \cdot 2^{-126} = (1+2^{-23}) \cdot 2^{-126}$

0000 0000 1000 0000 ··· 0010 $= (1{,}0\cdots10)_2 \cdot 2^{-126} = (1+2^{-22}) \cdot 2^{-126}$

0000 0000 1000 0000 ··· 0011 $= (1{,}0\cdots11)_2 \cdot 2^{-126} = (1+2^{-22}+2^{-23}) \cdot 2^{-126}$

$Exp = -125 \Rightarrow Char = 2$

0000 0001 0000 0000 ··· 0000 $= (1{,}0\cdots00)_2 \cdot 2^{-125}$

0000 0001 0000 0000 ··· 0001 $= (1{,}0\cdots01)_2 \cdot 2^{-125} = (1+2^{-23}) \cdot 2^{-125}$

IEEE-P 754 Format

Exp = 0 ⇒ Char = 127

0011 1111 1000 0000 ··· 0000 $= (1{,}0 \cdots 00)_2 \cdot 2^0 = 1$

0011 1111 1000 0000 ··· 0001 $= (1{,}0 \cdots 01)_2 \cdot 2^0 = 1 + 2^{-23}$

Exp = 127 ⇒ Char = 254

0111 1111 0000 0000 ··· 0000 $= (1{,}0 \cdots 00)_2 \cdot 2^{127} = 2^{127}$

0111 1111 0000 0000 ··· 0001 $= (1{,}0 \cdots 01)_2 \cdot 2^{127} = (1 + 2^{-23}) \cdot 2^{127}$

0111 1111 0111 1111 ··· 1111 $= (1{,}11 \cdots 11)_2 \cdot 2^{127}$

$= (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-22} + 2^{-23}) \cdot 2^{127}$

$= (1 + (1 - 2^{-24})) \cdot 2^{127} = 2^{128} - 2^{104}$ ***= maxreal***

IEEE-P 754 Format

Exp = E_{min} - 1 = -127 ⇒ Char = 0

- Darstellung von ±0

0000 0000 0000 0000 ··· 0000 = + 0

1000 0000 0000 0000 ··· 0000 = - 0

- Darstellung denormailsierter Zahlen

Kleinste denormalisierte Zahl

0000 0000 0000 0000 ··· 0001 $= (0{,}0 \cdots 01)_2 \cdot 2^{-126} = 2^{-23} \cdot 2^{-126} = 2^{-149}$

0000 0000 0000 0000 ··· 0010 $= (0{,}0 \cdots 10)_2 \cdot 2^{-126} = 2^{-22} \cdot 2^{-126} = 2^{-148}$

0000 0000 0111 1111 ··· 1111 $= (0{,}1 \cdots 11)_2 \cdot 2^{-126}$

$= (2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-23}) \cdot 2^{-126}$

$= (1 - 2^{-24}) \cdot 2^{-126}$

Größte denormalisierte Zahl

IEEE-P 754 Format

Exp = E_{max} + 1 = 128 ⇒ Char = 255

- Darstellung von ±∞

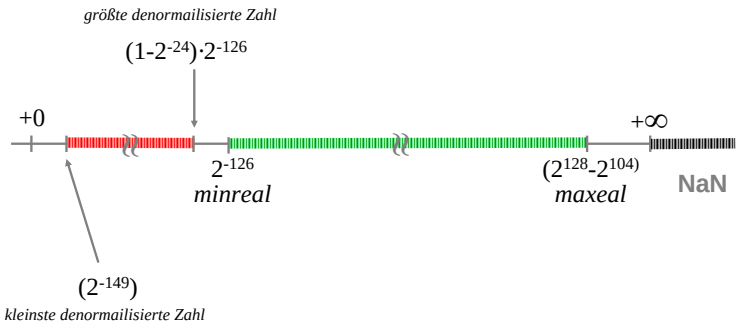
0111 1111 1000 0000 ··· 0000 = + ∞

1111 1111 1000 0000 ··· 0000 = - ∞

- Darstellung von NaN:

0111 1111 $\underbrace{1000\ 0000 \cdots 0001}_{M \neq 0}$ ⇒ **NaN**

Zusammenfassung der 32-Bit Format



Zusammenfassung der 32-Bit Format

- **Normalisierte GK-Zahlen: 254 verschiedene Exponenten**

  ⇒ $2 \cdot 254 \cdot 2^{23} = 127 \cdot 2^{25}$ normalisierte Zahlen

- **Denormalisierte GK-Zahlen (Char = 0)**

  ⇒ $2 \cdot 2^{23} = 2^{24}$ denormalisierte Zahlen (inkl. ±0)

- **NaN (Char = 255)**

  ⇒ $2 \cdot 2^{23} = 2^{24}$ NaN (inkl ±∞)

Aufgabe 1

Die Zahl π mit 7 Dezimalstellen hinter dem Komma im 32-Bit-IEEE-Format.

$\pi \approx 3{,}1415926_{10} = 11{,}00100100001111110110 10_2$

$= 1{,}1001001000011111101101 \cdot 2^1$

$= 1{,}M \cdot 2^1$

Char = Exp + 127

$= 1 + 127 = 128_{10}$

VZ	Char	100 100 ...

0 1000 0000 1001 ...

Aufgabe 1

Die Zahl π mit 7 Dezimalstellen hinter dem Komma im 32-Bit-IEEE-Format.

$\pi \approx 3{,}1415926_{10} = 11{,}00100100001111110110 10_2$

$= (-1)^0 \cdot 2^{(128-127)} \cdot 1{,}10010010000111111011010_2$

$= (-1)^0 \cdot 2^1 \cdot 1{,}10010010000111111011010_2$

VZ = 0

Exp = 1 ⇒ Char = 127+1 = 128_{10} = **$1000\ 0000_2$**

π = 0100 0000 0100 1001 0000 1111 1101 1010

= 4 0 4 9 0 F D A_{16}

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Gleitkomma-Zahl im 32-Bit-IEEE-Format.

Z = 01000001110000000000000000000000

Zahl in Dezimal-Darstellung?

0100 0001 1110 0000 0000 0000 0000 0000

$Z = \pm 1{,}M \cdot 2^{Exp}$

Char. $128 + 2 + 1 = 131$

Exp = Char − 127 = 131 − 127 = 4

$Z = +(1{,}110 \cdots 0) \cdot 2^4 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot 2^4$

$= (1 + \frac{3}{4}) \cdot 2^4 = 28_{10}$

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Gleitkomma-Zahl im 32-Bit-IEEE-Format.
Z = 01000001111000000000000000000000

Zahl in Dezimal-Darstellung?

0100 0001 1110 0000 0000 0000 0000 0000

VZ = 0
Char = 128+2+1 = 131 ⇒ Exp = 131-127 = 4_{10}
Mantisse = **110 0000 0000 0000 0000 0000_2**

$$Z = (-1)^0 \cdot 2^4 \cdot (1{,}1100\ 0000\ \ldots\ 0000)_2$$
$$= +(1 + 0{,}5 + 0{,}25)_{10} \cdot 2^4$$
$$= +1{,}75 \cdot 2^4 = 1{,}75 \cdot 16 = 28$$

Aufgabe

Gegeben seien zwei 32-Bit Gleitkommazahlen x und y im IEEE Standard

x = 0 0000 0001 000 0000 0000 0000 0000 0001

y = 0 0000 0001 000 0000 0000 0000 0000 0000

Gesucht: 1/(x-y)

Lösung

- Implementierung im Rechner:
  - 1. Vorschlag: z := 1 /(x-y)
  - 2. Vorschlag: if (x != y) then z:=1/(x-y)

x = 0 0000 0001 000 0000 0000 0000 0000 0001

y = 0 0000 0001 000 0000 0000 0000 0000 0000

$x = (1 + 2^{-23}) \cdot 2^{-126}$
$y = 1 \cdot 2^{-126}$

$x - y = 2^{-149}$

Addition von Gleitkommazahlen

Addiere die beiden GK-Zahlen (im IEEE-Standard)

0100 0011 1110 0000 … 0000 und

0100 0010 0101 0000 … 0000

$\pm m_x \cdot 2^{e_x}$ $+ m_y \cdot 2^{e_y}$

Multiplikation von Gleitkommazahlen

Multipliziere die beiden GK-Zahlen (im IEEE-Standard)

3FE0 0000 und

3E40 0000

Aufgaben

- Hamming-Code
  - Erkennen und korrigieren von 1-Bit-Fehlern
  - Erkennen von 2-Bit-Fehlern

Ein-Bit-Fehlerkorrektur

Notwendiger Aufwand für die sog. ***Hammingkodes***:

$$2^k \geq m + k + 1$$

k: Zahl der zusätzlichen Korrekturbits

m: Zahl der Datenbits

Mindestaufwand: Ein-Bit Fehlerkorrekturcodes

Zahl der Datenbits m	Zahl der Prüfbits k	Bits insgesamt: $m + k$
1	2	$m + 2$
2 bis 4	3	$m + 3$
5 bis 11	4	$m + 4$
12 bis 26	5	$m + 5$
27 bis 57	6	$m + 6$
64	… 7	…

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Position
	4								3				2		1	0	i
m_{12}	k_5	m_{11}	m_{10}	m_9	m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1	Stellen

Datenwort: 1 0 1 0 1 0 1 0 $m = 8$

Datenwort ausspreizen: $k = 4$

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	0	1	0	-	1	0	1	-	0	-	-
m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1

0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
...

Bestimmung der Prüfbits:

$k_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = \mathbf{0}$
$k_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_6 \oplus m_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = \mathbf{0}$
$k_3 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_8 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{1}$
$k_4 = m_5 \oplus m_6 \oplus m_7 \oplus m_8 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = \mathbf{0}$

➔ **Codewort: 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0**

Aufgabe 2

Der Hauptspeicher eines Rechners mit 8-Bit Datenwortbreite unterstützt eine Einzelbitfehler-Korrektur. Aus dem Speicher erhält man die beiden Codewörter

- Codewort 1: **101001000110**
- Codewort 2: **100000000000**

Prüfen Sie beide Codewörter auf Fehler, die beim Übertragen oder Speichern entstanden sein könnten und korrigieren Sie diese (falls notwendig). Geben Sie die zugehörigen Datenwörter an.

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Position
	4								3				2		1	0	i
m_{12}	k_5	m_{11}	m_{10}	m_9	m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1	Stellen

Hammingcode mit 8 Datenbits und 4 Prüfbits

	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Codewort 1 :	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
	m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1

Bestimmung der Prüfbits:

$k_1 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = \mathbf{0}$
$k_2 = \overline{k_2} \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_6 \oplus m_7 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = \mathbf{0}$
$k_3 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_8 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{0}$
$k_4 = k_4 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_7 \oplus m_8 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = \mathbf{0}$

$k_4 k_3 k_2 k_1 = 0000$ ➔ Codewort ist fehlerfrei

➔ **Datenwort: 1 0 1 0 1 0 0 1**

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Position
	4								3				2		1	0	i
m_{12}	k_5	m_{11}	m_{10}	m_9	m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1	Stellen

	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Codewort 2 :	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1

Bestimmung der Prüfbits:

$k_1 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = \mathbf{0}$
$k_2 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_6 \oplus m_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = \mathbf{0}$
$k_3 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_8 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = \mathbf{1}$
$k_4 = k_4 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_7 \oplus m_8 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = \mathbf{1}$

$k_4 k_3 k_2 k_1 = 1100 = 12_{10}$ ➔ **Fehler in der 12. Position**

➔ **Datenwort: 0 0 0 0 0 0 0 0**

Hammingkode: Beispiel 2-Bitfehler

- Fall 1: Kein Fehler

m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1	***PB***
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

$k_4 k_3 k_2 k_1 = 0000$

- Fall 2: 1-Bit-Fehler

0 0 1 0 0 0 1 1 0 1

$k_4 k_3 k_2 k_1 = 0110$
Fehler an 6. Position

- Fall 3: 2-Bitfehler

0 0 1 0 0 0 0 1 0 0

$k_4 k_3 k_2 k_1 = 0101$
2-Bit-Fehler

Hammingkode-Applet

- TI-Homepage

ti.itec.uka.de