Wdh: Implikanten im KV-Diagramm (1)

Auffrischung: Definition des Implikanten:

f sei eine Funktion von $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ sowie **g** ein Produktterm aus Literalen dieser Variablen.

g ist **Implikant** von **f**, wenn **g** die Funktion **f** impliziert, d. h. wenn die Menge aller Einsstellen von **g** in der Menge aller Einsstellen von **f** enthalten ist.

Wdh. Implikanten im KV-Diagramm (4)

Ein **Implikant k-ter Ordnung**

- umfasst **2^k** Felder des KV-Diagramms und
- entspricht im Würfelkalkül einem Würfel mit **k** "don´t cares".

f :

	a	a	
1_0	0_1	1_5	1_4
1_2	0_3	1_7	1_6

(Zeile 2: b; Spalten 3–4: c)

So erhält man

- Implikanten 0. Ordnung: Minterme
- Implikanten 1. Ordnung: Zusammenfassung von 2 Mintermen (z. B. b c im Beispiel)
- Implikanten 2. Ordnung: Zusammenfassung zweier Implikanten 1. Ordnung (z. B. $\overline{a}$ oder c im Beispiel)
- usw.

Wdh. Definition: Primimplikant

Ein Implikant $\mathbf{p}$ ist **Primimplikant**, falls es keinen Implikanten $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ gibt, der von $\mathbf{p}$ impliziert wird

$$\forall\ \mathbf{q} \neq \mathbf{p}:\ \neg(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$$

d. h. $\mathbf{p}$ ist von größtmöglicher Ordnung ($\mathbf{p}$ umfasst einen maximal großen Einsblock).

Es gilt:

Jede Funktion ist als Disjunktion ihrer Primimplikanten darstellbar.

Herauslesen der Primimplikanten aus dem KV-Diagramm

Man versucht, möglichst große Blöcke von Einsen im Diagramm zu finden, wobei jeder Einsblock 2^k Felder umfassen muss.

Beispiel:

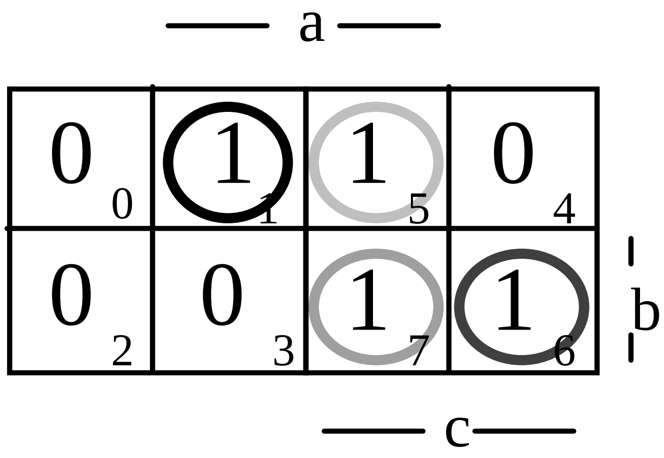
$$g = \bar{a}\, b\, c \vee a\, c \vee a\, \bar{b}\, \bar{c}$$

$$= \bar{a} b c \vee a b c \vee a \bar{b} c \vee a \bar{b} \bar{c}$$

$$= (\bar{a} \vee a) \cdot bc \vee a\bar{b}(c \vee \bar{c})$$

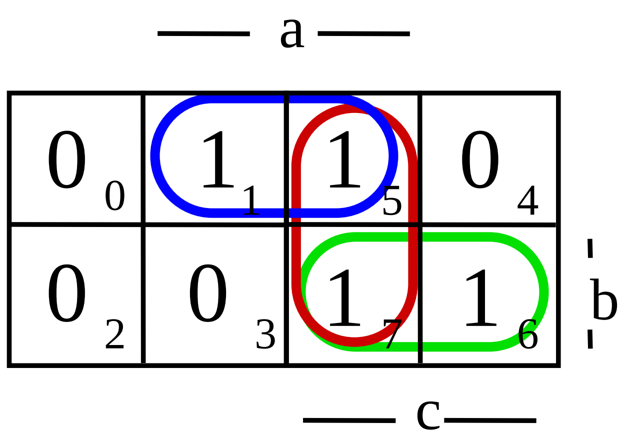
$$= bc \vee a\bar{b}$$

Beispiel: $g = \bar{a}\,b\,c \vee a\,c \vee a\,\bar{b}\,\bar{c}$



4 Minterme:

$a\,\bar{b}\,\bar{c},\ a\,\bar{b}\,c,\ a\,b\,c,\ \bar{a}\,b\,c$



3 Primimplikanten:
Implikanten erster Ordnung

$a\,\bar{b},\ a\,c,\ b\,c$

Aber:

$a\,\bar{b},\ b\,c$ genügen eigentlich!

Minimierung einer zweistufigen Schaltfunktion

1.Schritt:

Bestimmung der Primimplikanten = Implikanten mit der kleinstmöglichen Anzahl von Literalen

$\Rightarrow$ Gatter mit der kleinstmöglichen Zahl an Eingängen

2. Schritt:

Auswahl einer minimalen Anzahl von Primimplikanten zur Überdeckung der Funktion

$\Rightarrow$ Minimale Anzahl von Gattern

Minimale Überdeckung

Bestimmung einer minimalen Überdeckung von Primimplikanten im KV-Diagramm:

Definition 2.12:

Ein Primimplikant ist ein **Kernprimimplikant**, wenn er einen Minterm der Funktion überdeckt, der von keinem anderen Primimplikanten überdeckt wird.

Kernprimimplikanten *müssen* in der disjunktiven Minimalform vorkommen.

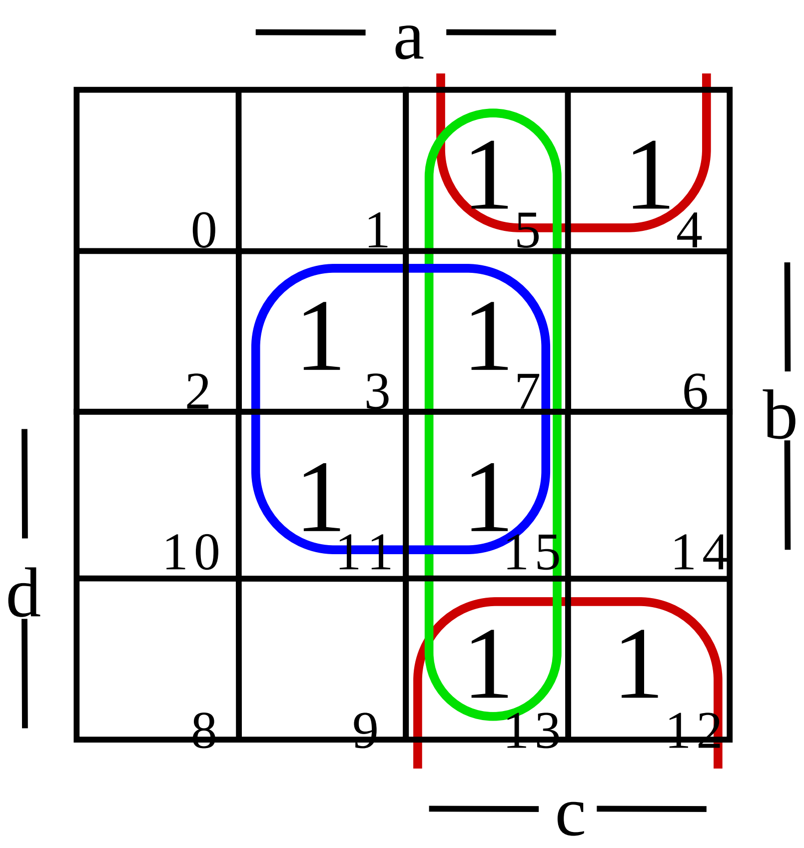
Disjunktive Minimalform

Die Funktion soll durch eine disjunktive Form aus Kernprimimplikanten und möglichst wenigen weiteren Primimplikanten überdeckt werden (irredundante Überdeckung).

Auswahl der Kernimplikanten und der kleinstmöglichen Anzahl von weiteren Primimplikanten bei KV-Diagrammen: "durch Hinschauen" (systematische Verfahren später)

$\Rightarrow$ **disjunktive Minimalform**

Beispiel 1: Disjunktive Minimalform



$f = a\,b \vee a\,c \vee \overline{b}\,c$

Primimplikanten:

$a\,b,\ a\,c,\ \overline{b}\,c$

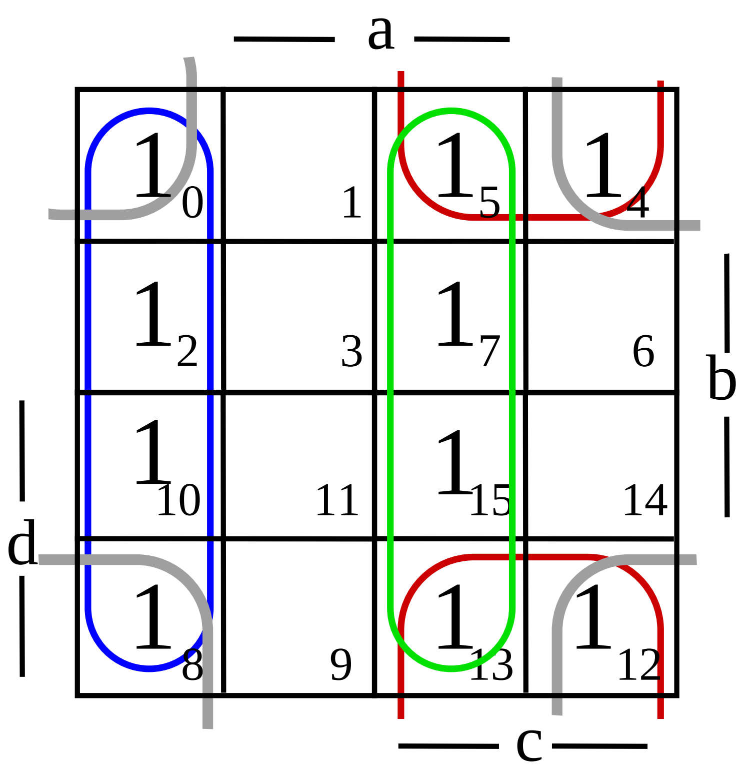
Kernprimimplikanten:

$a\,b,\ \overline{b}\,c$

Minimale Form:

$f = a\,b \vee \overline{b}\,c$

Beispiel 2: Disjunktive Minimalform



$$g = \bar{a}\,\bar{c} \vee a\,c \vee \bar{a}\,\bar{b}$$

Primimplikanten:

$\bar{a}\,\bar{c}$, $a\,c$, $\bar{b}\,c$, $\bar{a}\,\bar{b}$

Kernprimimplikanten:

$\bar{a}\,\bar{c}$, $a\,c$

Minimale Form:

$$g = \bar{a}\,\bar{c} \vee a\,c \vee \bar{b}\,c$$

Bestimmung einer konjunktiven Minimalform aus dem KV-Diagramm

Im Prinzip wie bei der disjunktiven Minimalform

Es werden anstelle der Einsen die Nullen betrachtet.

Man sucht nun konjunktive Terme (Implikate) durch das Betrachten von Maxtermen und ihrer möglichen Zusammenfassungen.

Konjunktive Minimalform

Vorgehensweise:

1. Schritt:

Zusammenfassung der größtmöglichen Blöcke von Nullen, wobei jeder Block 2^k Felder umfassen muss

$\Rightarrow$ **Primimplikate**

2. Schritt:

Auswahl einer minimalen Anzahl von Primimplikaten, bestehend aus Kernprimimplikaten und weiteren Primimplikaten

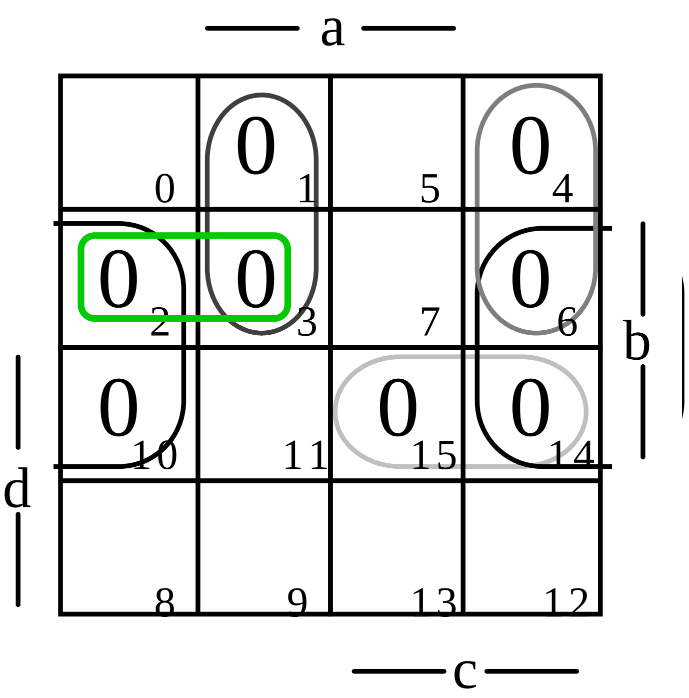
$\Rightarrow$ **Konjunktive Minimalform**

Konjunktive Minimalform

Besonderheit beim Ablesen der disjunktiven Terme:

Um den disjunktiven „Summenterm“ für einen 0-Block zu erhalten, verknüpft man die Variablen, in denen der Block *nicht* liegt, disjunktiv miteinander.

Konjunktive Minimalform



Maxterme 2, 6, 10, 14 ergeben $(a \vee \bar{b})$

Maxterme 1, 3 ergeben $(\bar{a} \vee c \vee d)$

Maxterme 4, 6 ergeben $(a \vee \bar{c} \vee d)$

Maxterme 14, 15 ergeben $(\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d})$

Damit ergibt sich die KMF für die Funktion:

$$g = (a \vee \bar{b})(\bar{a} \vee c \vee d)(a \vee \bar{c} \vee d)(\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d})$$

Maxterme 2, 3 ergeben $(\bar{b} \vee c \vee d)$. Dies ist jedoch entbehrlich!

Minimierung

- **Schritt 1:**
  Berechnung aller Primimplikanten (Primimplikate) der gegebenen Funktion

  → Gatter mit möglichst wenig Eingängen

- **Schritt 2:**
  Auswahl einer Menge von Primimplikanten (Primimplikate) zur Bildung der Minimalform: Kernprimimplika(n)te(n) und möglichst wenigen Primimplika(n)ten zur Überdeckung der Funktion

  → Minimale Anzahl an Gattern

Minimierungsverfahren

- **Algebraische Verfahren:**
  - Vereinfachung mit Hilfe der Gesetze der Booleschen Algebra
  - Nelson-Verfahren (später)
- **Graphische Verfahren**
  - KV-Diagramme
- **Tabellarische Verfahren:**
  - Quine-McCluskey-Verfahren
  - Consensus-Verfahren

Diese Verfahren bestimmen alle Primterme einer Booleschen Funktion (Schritt 1 der Minimierung)

Unvollständig definierte Funktionen (1)

Bei den bisher betrachteten Funktionen war für jede mögliche Belegung der Eingangsvariablen ein Funktionswert definiert

➡ **vollständig definierte Funktion**

Es kommt jedoch vor, dass der Funktionswert nur für bestimmte Eingangsbelegungen definiert ist und die Funktionswerte der restlichen Belegungen frei wählbar sind

➡ **unvollständig** oder **partiell definierte Funktion**

Unvollständig definierte Funktionenn (2)

Die nicht verwendeten Eingangsbelegungen bezeichnet man als **"don´t care"-Belegungen**. Man kann ihren Funktionswert beliebig zu 0 oder 1 verfügen.

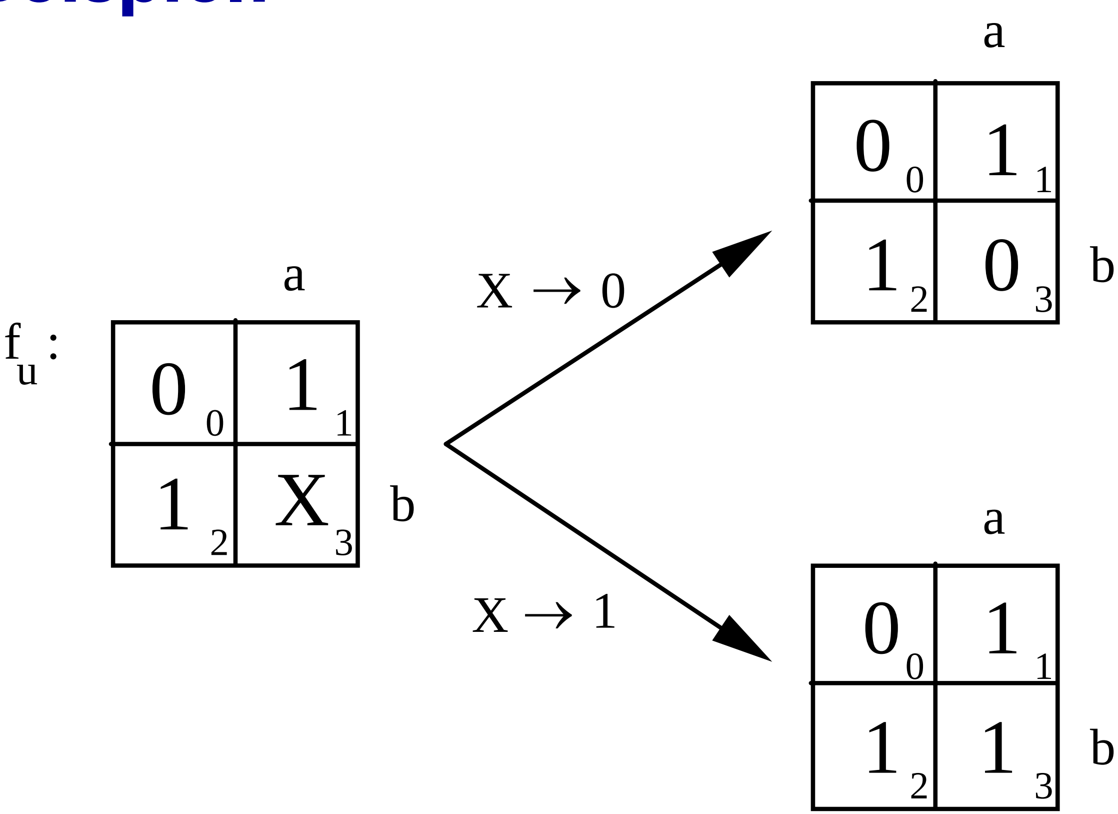
Ziel:

Vereinfachung des Funktionsausdrucks durch geschickte Wahl des Funktionswertes für "don´t care"-Belegungen.

Um eine möglichst einfache DMF zu erhalten, muss man "don´t cares" so zu 0 oder 1 verfügen, dass möglichst große Einsblöcke und somit möglichst „kurze“ Primimplikanten entstehen.

Unvollständig definierte Funktionen (3)

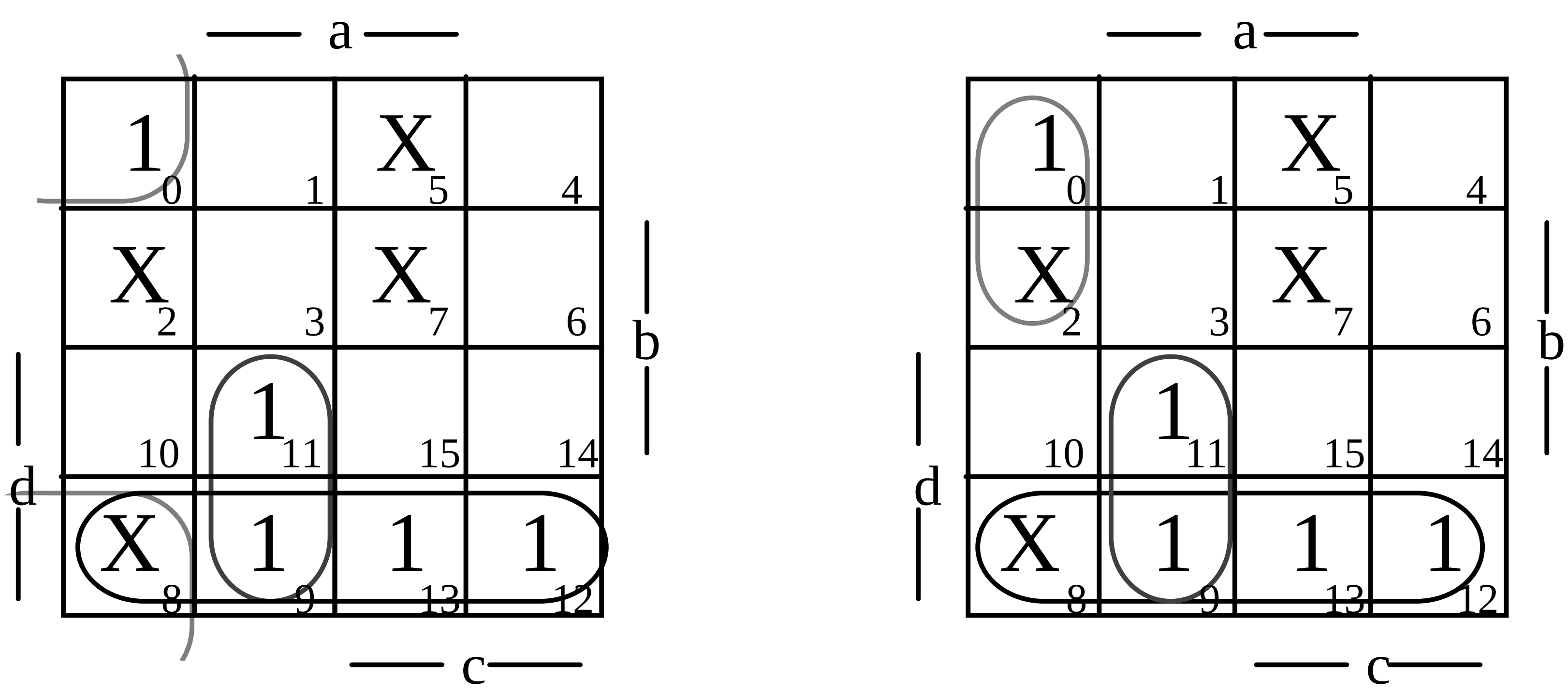
Beispiel:



$f_{v1} = a\,\overline{b} \vee \overline{a}\,b$ nicht minimal

$f_{v2} = a \vee b$ minimal

Unvollständig definierte Funktionen (4)



$f_u = \bar{b}\,c\,d \vee a\,\bar{c}\,d \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}$ (nur Einsstellen der unvollst. def. Funktion f_u)

$f_{v1} = \bar{b}\,d \vee a\,\bar{c}\,d \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ (Feld 8 zu „1“ $\rightarrow$ vollst. def. Funktion f_{v1})

$f_{v2} = \bar{b}\,d \vee a\,\bar{c}\,d \vee \bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d}$ (Felder 8 und 2 zu „1“ verfügt $\rightarrow$ f_{v2})

Zusammenfassung: Minimierung

- **Schritt 1:**
  Berechnung aller Primimplikanten (Primimplikate) der gegebenen Funktion

  → Gatter mit möglichst wenig Eingängen

- **Schritt 2:**
  Auswahl einer Menge von Primimplikanten (Primimplikate) zur Bildung der Minimalform: Kernprimimplika(n)te(n) und möglichst wenigen Primimplika(n)ten zur Überdeckung der Funktion

  → Minimale Anzahl an Gattern

Zusammenfassung: Graphische Minimierung

KV-Diagrammtechnik: Graphisches Minimierungsverfahren

- Suche möglichst große Blöcke von Einsen (Nullen)
  → Primimplikanten (Primimplikate)
- Bestimme die Blöcke, die Einsen (Nullen) enthalten, die von keinem anderen Block überdeckt werden
  → Kernprimpimplikaten (Kernprimimplikate)
- Minimalform: Alle Kernprimimplikanten (Kernprimimplikate) verknüpft mit den noch nötigen Primpimplikanten (Primimplikate)

Minimalformen unvollständig verknüpfter Funktionen (mit don‘t cares) analog!

Minimierungsverfahren

- **Algebraische Verfahren:**
  - Vereinfachung mit Hilfe der Gesetze der Booleschen Algebra
  - Nelson-Verfahren (später)
- **Graphische Verfahren**
  - KV-Diagramme
- **Tabellarische Verfahren:**
  - Quine-McCluskey-Verfahren
  - Consensus-Verfahren

Quine-McCluskey-Verfahren

- Arbeitet nach dem gleichen Prinzip wie KV-Diagramme:
  - Terme , die sich in nur einer Variablen unterscheiden, werden zusammengefasst.
  - Ausgangspunkt: Funktionstabelle einer Funktion.
  - Disjunktive wie konjunktive Minimalformen können erzeugt werden.
- Bei disjunktiven Minimalformen DMF (Primimplikanten) arbeitet man mit den Mintermen der Funktion. Bei konjunktiven Minimalformen KMF (Primimplikate) mit den Maxtermen.
- Das Verfahren wird im folgenden für DMF erläutert
  - ➔ Ausgangspunkt sind die Minterme der Funktion
- Für KMF geht man analog mit den Maxtermen vor.

Beispiel

Nr.	e	d	c	b	a	f
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0

Nr.	e	d	c	b	a	f
16	1	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1	0
18	1	0	0	1	0	1
19	1	0	0	1	1	0
20	1	0	1	0	0	0
21	1	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	0	1
23	1	0	1	1	1	0
24	1	1	0	0	0	0
25	1	1	0	0	1	0
26	1	1	0	1	0	1
27	1	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0	0
29	1	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0	1
31	1	1	1	1	1	0

Beispiel

Nr.	e	d	c	b	a	f
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0

Nr.	e	d	c	b	a	f
16	1	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1	0
18	1	0	0	1	0	1
19	1	0	0	1	1	0
20	1	0	1	0	0	0
21	1	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	0	1
23	1	0	1	1	1	0
24	1	1	0	0	0	0
25	1	1	0	0	1	0
26	1	1	0	1	0	1
27	1	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0	0
29	1	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0	1
31	1	1	1	1	1	0

Quine-McCluskey - Verfahren
Bestimmung der Primimplikanten

1. Schritt:

Die Minterme werden nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden nicht negierten Variablen geordnet → **1. Quineschen Tabelle**.

Gewicht	Nr.	0. Ordnung
1	2	00010
	4	00100
2	5	00101
	6	00110
	10	01010
	12	01100
	18	10010
3	13	01101
	14	01110
	22	10110
	26	11010
4	30	11110

Quine-McCluskey - Verfahren
Bestimmung der Primimplikanten

2. Schritt:

- Es werden Ausdrücke gesucht, **die sich nur in einer Variablen unterscheiden**, und durch Streichen der unterschiedlichen Variablen zusammengefasst.
- Durch die Ordnung der Minterme müssen nur Ausdrücke in jeweils benachbarten Gruppen verglichen werden.
- Die zusammengefassten Ausdrücke werden in eine neue Spalte der Tabelle geschrieben.
- Die Ordnung bleibt beim Zusammenfassen automatisch bestehen.
- Zwei Ausdrücke, aus denen ein neuer entstanden ist, werden **abgehakt** und somit als **Nicht-Primimplikant** gekennzeichnet. **Sie nehmen jedoch weiter an den Vergleichen teil.**

Quine-McCluskey - Verfahren

3. Schritt:

Dies wird solange wiederholt, bis keine neuen Spalten mehr in der Tabelle entstehen.

Alle nicht abgehakten Ausdrücke in der Tabelle sind die Primblöcke (→ Primimplikanten).

Anmerkung:

Bei fortgesetztem Zusammenfassen kann es passieren, dass die gleichen Ausdrücke mehrfach entstehen. Solche Ausdrücke trägt man nur einmal in die Tabelle ein.

Quine-McCluskey - Verfahren
Bestimmung der Primimplikanten

Nr.	0. Ordnung
✔ 2	00010
✔ 4	00100
✔✔ 5	00101
✔✔ 6	00110
✔✔ 10	01010
✔✔ 12	01100
✔✔ 18	10010
✔ 13	01101
✔✔ 14	01110
✔✔ 22	10110
✔✔ 26	11010
✔ 30	11110

Nr.	1. Ordnung
2,6	00-10
2,10	0-010
2,18	-0010
4,5	0010-
4,6	001-0
4,12	0-100
5,13	0-101
6,14	0-110
6,22	-0110
10,14	01-10
10,26	-1010
12,13	0110-
12,14	011-0
18,22	10-10
18,26	1-010
14,30	-1110
22,30	1-110
26,30	11-10

Nr.	2. Ordnung
2,6,10,14	0--10
2,6,18,22	-0-10
2,10,18,26	--010
4,5,12,13	0-10- **A**
4,6,12,14	0-1-0 **B**
6,14,22,30	--110
10,14,26,30	-1-10
18,22,26,30	1--10

Nr.	3. Ordnung
2,6,10,14, 18,22,26,30	---10 **C**

Quine-McCluskey - Verfahren

4. Schritt:

Umsetzen der entstehenden Primblöcke (Würfel) in Primimplikanten.

Beispiel:

0 - 1 0 -	$\Rightarrow \bar{e}\, c\, \bar{b}$
0 - 1 - 0	$\Rightarrow \bar{e}\, c\, \bar{a}$
- - - 1 0	$\Rightarrow b\, \bar{a}$

➔ 1. Schritt der Minimierung ist fertig

2. Schritt der Minimierung

Auswahl einer minimalen Anzahl von Primimplikanten

- Die Primimplikanten werden zusammen mit den Nummern der Minterme, aus denen sie hervorgegangen sind, in die **2. Quinesche Tabelle (Überdeckungstabelle)** eingetragen.

- Die Aufgabe besteht nun darin, diejenigen Primimplikanten zu finden, die alle Minterme überdecken und die Kosten dieser Überdeckung zu minimieren.

  Realisierungskosten eines Primimplikanten:
  z. B. die Anzahl der benötigten UND-Gatter-Eingänge

Quine-McCluskey – Verfahren: Auswahl einer minimalen Anzahl von Primimplikanten

2. Quinesche Tabelle für obige 1. Quinesche Tabelle:

Primimp.	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		×	×			×	×						3
B		×		×		×		×					3
C	×			×	×			×	×	×	×	×	2

Kernprimimplikanten sind diejenigen Primimplikanten, die für ein einzelnes "×" in einer Spalte verantwortlich sind.

Beispiel: **C ist ein Kernprimimplikant**, da nur C in den Spalten für die Minterme 2, 10, 18, 22, 2

A ist ebenfalls Kernprimimplikant.

4,5,12,13 0-10- **A**
4,6,12,14 0-1-0 **B**

2,6,10,14,
18,22,26,30 ---10 **C**

Überdeckungstabelle

Primimp.	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		×	×			×	×						3
B		×		×		×		×					3
C	×			×	×			×	×	×	×	×	2

➡ Primimplikanten A und C überdecken alle Minterme

➡ **Minimalform:** $f = \bar{b}\ c\ \bar{e} \vee \bar{a}\ b$