Wdh. 3.1.4 Normalformen

Boolesche Funktion kann durch verschiedene Boolesche Ausdrücke beschrieben werden.

Eine Standarddarstellung Boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem ($\wedge$, $\vee$, $\overline{\ }$) ist die **konjunktive (KNF)** und die **disjunktive Normalform (DNF)**.

- Produktterm
- Minterm
- Implikant
- disjunktive Normalform (DNF)

Implikat

Definition 2.7:

Es sei $\mathbf{D(x_1,\ldots,x_m)}$ eine Disjunktion von Literalen

$\bigvee_{i=1}^{m} L_i = L_1 \vee \ldots \vee L_m$ oder die Konstante "0" oder "1"

Summenterm → dual zum Produktterm

Der Term $\mathbf{D\ (x_1,\ldots,x_m)}$ heißt **Implikat** einer Booleschen Funktion $\mathbf{y\ (x_1,\ldots,x_m)}$, wenn $\overline{D} \rightarrow \overline{y}$

Das heißt für jede Belegung $\mathbf{B} \in \{0,1\}^n$ gilt: Wenn $\mathbf{D(B) = 0}$, dann ist auch $\mathbf{y(B) = 0}$.

dual zu Implikant!

Maxterm

Definition 2.8:

Ein Implikat einer Booleschen Funktion $\mathbf{y(x_1,\ldots,x_m)}$ heißt **Maxterm**, wenn ein Literal jeder Variable $\mathbf{x_i}$ der Funktion y im Implikaten genau einmal vorkommt.

Maxterm-Beispiele für die Booleschen Funktion $y(x_1,\ldots,x_3)$:

$x_1 \vee x_2 \vee x_3$

$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$

dual zu Mintermen

Konjunktive Normalform

Definition 2.9:

Es sei eine Boolesche Funktion $\mathbf{y(x_1,\ldots,x_n)}$ gegeben.

Ein Boolescher Ausdruck heißt **konjunktive Normalform (KNF)**, wenn er aus einer konjunktiven Verknüpfung von Maxtermen $\mathbf{D_i}$ besteht:

$$\mathbf{y = D_0 \wedge D_1 \wedge \ldots \wedge D_k \quad , \quad k \leq 2^n\text{-}1}$$

Es darf dabei keine zwei Disjunktionen $\mathbf{D_i}$, $\mathbf{D_j}$ mit $\mathbf{i \neq j}$ geben, die zueinander äquivalent sind.

Minterme & Maxterme

In einer Funktion mit n Variablen können bis zu 2^n Minterme bzw. Maxterme auftreten. Für n = 3 sind diese:

Dualität

produziert "1"

produziert "0"

	Minterm	Maxterm
0	$\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$	$a \vee b \vee c$
1	$a\ \overline{b}\ \overline{c}$	$\overline{a} \vee b \vee c$
2	$\overline{a}\ b\ \overline{c}$	$a \vee \overline{b} \vee c$
3	$a\ b\ \overline{c}$	$\overline{a} \vee \overline{b} \vee c$
4	$\overline{a}\ \overline{b}\ c$	$a \vee b \vee \overline{c}$
5	$a\ \overline{b}\ c$	$\overline{a} \vee b \vee \overline{c}$
6	$\overline{a}\ b\ c$	$a \vee \overline{b} \vee \overline{c}$
7	$a\ b\ c$	$\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}$

Herkunft der Bezeichnungen

- Minterme:
  - Ein einziger Minterm:
    - Für genau eine Belegung Funktionswert 1
    - Minimalität:
      - maximale Anzahl an Nullen
      - minimale Anzahl an Einsen

      (abgesehen von trivialer Nullfunktion)
- Maxterme:
  - Ein einziger Maxterm:
    - Für genau eine Belegung Funktionswert 0
    - Maximalität:
      - maximale Anzahl an Einsen
      - minimale Anzahl an Nullen

      (abgesehen von trivialer Einsfunktion)

DNF und KNF (1)

Disjunktive und konjunktive Normalformen sind **eindeutige** Darstellungen!

Beispiel:

$y = a\ \overline{b} \vee c$

$= \overline{\overline{a \overline{b} \vee c}}$

$= \overline{(\overline{a} \vee b) \wedge \overline{c}}$

nicht eindeutig!

- Algebraische Umformung in DNF

$y = a\overline{b}(c \vee \overline{c}) \vee c(a \vee \overline{a})(b \vee \overline{b})$

$= a\overline{b}c \vee a\overline{b}\overline{c} \vee abc \vee a\overline{b}c \vee \overline{a}bc \vee \overline{a}\overline{b}c$

DNF und KNF (2)

$= \overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}bc \vee a\overline{b}\overline{c} \vee a\overline{b}c \vee abc$

eindeutig!

analog für KNF!

DNF: $y = \overline{a}\ \overline{b}\ c \vee \overline{a}\ b\ c \vee a\ \overline{b}\ \overline{c} \vee a\ \overline{b}\ c \vee a\ b\ c$

KNF: $y = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \overline{b} \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)$

DNF oder KNF aus beliebiger Form

Um Funktionen aus der DF bzw. KF in die DNF bzw. KNF zu überführen, ist der **Shannonsche Entwicklungssatz** behilflich.

Entwicklung nach der Variablen $\mathbf{x_i}$:

- die Variable wird in der Funktion auf den Wert **1** gesetzt,
- der entstehende Term konjunktiv mit $\mathbf{x_i}$ verknüpft,

$\vee$ -verknüpft mit:

- die Variable wird in der Funktion auf den Wert **0** gesetzt und
- der entstehende Term konjunktiv mit $\overline{\mathbf{x}}_i$ verknüpft

$\mathbf{y \quad = f(x_1,\ldots, x_n)}$

$\mathbf{= [\ x_i \wedge \underbrace{f(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , 1, x_{i+1} ,\ldots, x_n)}_{\text{Restfunktionen}}] \vee [\ \overline{x}_i \wedge \underbrace{f(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , 0, x_{i+1} ,\ldots, x_n)}]}$

Beweis Entwicklungssatz

durch Einsetzen:

$f(x_1,\ldots,x_i=1,\ldots,x_n) = (1 \wedge f(x_1,\ldots,x_i=1,\ldots,x_n))$

$\vee\ (0 \wedge f(x_1,\ldots,x_i=0,\ldots,x_n))$

$= f(x_1,\ldots,x_i=1,\ldots x_n)$ ✓

$f(x_1,\ldots,x_i=0,\ldots,x_n) = (0 \wedge f(x_1,\ldots,x_i=1,\ldots,x_n))$

$\vee\ (1 \wedge f(x_1,\ldots,x_i=0,\ldots x_n))$

$= f(x_1,\ldots,x_i=0,\ldots,x_n)$ ✓

Beispiel (1)

$\mathbf{y = f(x_1,\ldots, x_n) = [\ x_i \wedge f(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , 1, x_{i+1} ,\ldots, x_n)] \vee [\ \overline{x}_i \wedge f(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , 0, x_{i+1} ,\ldots, x_n)]}$

$y = a\ \overline{b}\ c \vee \overline{a}\ \overline{b} \vee b\ c$

$= a(1\overline{b}c \vee \overline{1}\overline{b} \vee bc) \vee \overline{a}(0\overline{b}c \vee \overline{0}\overline{b} \vee bc)$

$= a(\overline{b}c \vee bc) \vee \overline{a}(\overline{b} \vee bc)$

$= a(b[\overline{1}c \vee 1c] \vee \overline{b}[\overline{0}c \vee 0c]) \vee$

$\overline{a}(b[\overline{1} \vee 1c] \vee \overline{b}[\overline{0} \vee 0c])$

$= a(bc \vee \overline{b}c) \vee \overline{a}(bc \vee \overline{b})$

Beispiel (2)

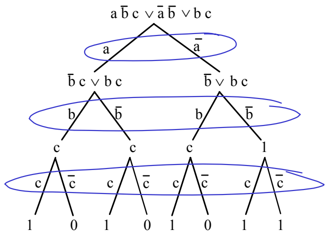
$\mathbf{y = f(x_1,\ldots, x_n)\ [\ x_i \wedge f(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , 1, x_{i+1} ,\ldots, x_n)] \vee [\ \overline{x}_i \wedge f(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , 0, x_{i+1} ,\ldots, x_n)]}$

$= a(b[c1 \vee \overline{c}0] \vee \overline{b}[c1 \vee \overline{c}0])$

$\vee\ \overline{a}(b[c1 \vee \overline{c}0] \vee \overline{b}[c1 \vee \overline{c}1])$

$= abc \vee a\overline{b}c \vee \overline{a}bc \vee \overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}$

Beispiel (3)



Nachdem die Funktion nach allen Variablen entwickelt wurde, können die Minterme durch Verfolgen der Äste des Baums gefunden werden, die zu einer 1 führen.

Dualer Entwicklungssatz

- Dualität: $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$, $\vee \rightarrow \wedge$
- $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$

$= (x_i \vee f(x_1,\ldots,x_i=0,\ldots,x_n))$

$\wedge\ (\overline{x}_i \vee f(x_1,\ldots,x_i=1,\ldots,x_n))$

Deutung: Normalformen

- Minterm entspricht Zeile der Funktionstabelle mit Funktionswert 1
  - DNF = disjunktive Verknüpfung aller Minterme
    - Alle Eingangsvariablen in Zeile mit Funktionswert **1** mit $\wedge$ verknüpfen
    - Eingangsvariablen mit dem Wert 0 negieren
- Maxterm entspricht Zeile der Funktionstabelle mit Funktionswert 0
  - KNF = konjunktive Verknüpfung aller Maxterme
    - Alle Eingangsvariablen in Zeile mit Funktionswert **0** mit $\vee$ verknüpfen
    - Eingangsvariablen mit dem Wert 1 negieren

Beispiel: DNF und KNF

Um eine Funktion zu beschreiben, reicht die Angabe aller Minterme (oder aller Maxterme) aus.

Nr.	c b a	y	Minterme	Maxterme
0	0 0 0	1	$\overline{c}\ \overline{b}\ \overline{a}$	
1	0 0 1	0		$c \vee b \vee \overline{a}$
2	0 1 0	0		$c \vee \overline{b} \vee a$
3	0 1 1	1	$\overline{c}\ b\ a$	
4	1 0 0	1	$c\ \overline{b}\ \overline{a}$	
5	1 0 1	0		$\overline{c} \vee b \vee \overline{a}$
6	1 1 0	0		$\overline{c} \vee \overline{b} \vee a$
7	1 1 1	1	$c\ b\ a$	

DNF: $y = (\overline{c}\ \overline{b}\ \overline{a}) \vee (\overline{c}\ b\ a) \vee (c\ \overline{b}\ \overline{a}) \vee (c\ b\ a)$

KNF: $y = (c \vee b \vee \overline{a})(c \vee \overline{b} \vee a)(\overline{c} \vee b \vee \overline{a})(\overline{c} \vee \overline{b} \vee a)$

DNF/KNF: Kurze Schreibweise

Verkürzte Schreibweise:

nur die Indizes (Dualkodierungen der (c, b, a) - Belegung) der 1- oder 0-Stellen der Funktion

Voraussetzung: Eindeutige Reihenfolge der Variablen.

Beispiel (Reihenfolge der drei Variablen **c, b, a**)

$y = \mathrm{MINt}(0, 3, 4, 7)$

$y = \mathrm{MAXt}(1, 2, 5, 6)$

Minimalformen

Ziele:

- „Möglichst kurze" Boolesche Ausdrücke einer Booleschen Funktion
- Technische Realisierung einer Schaltung mit möglichst geringen Kosten Beispiel: 10 Eingänge ↳ 1024 Belegungen ⇒ z.B. 512 "1"

Ähnlich zu Normalformen:

- **Disjunktive Minimalform (DMF)** und
- **konjunktive Minimalform (KMF)**

Disjunktive Minimalform (DMF)

Gegeben:

- Boolesche Funktion $\mathbf{y(x_1,...,x_n)}$
- Kostenfunktionen $\mathbf{\Psi_{UND}(k)}$ und $\mathbf{\Psi_{ODER}(k)}$ (beschreiben Realisierungskosten einer k-stelligen UND- bzw. ODER-Verknüpfung, Kosten für Negation einer Variablen vernachlässigt)

Definition:

Ein Ausdruck ist in **disjunktiver Minimalform (Abk.: DMF),** wenn er eine Disjunktion von Konjunktionen

$$\mathbf{y(x_1,...,x_n) = (L_{11}\cdot...\cdot L_{1k}) \vee ... \vee (L_{m1}\cdot...\cdot L_{mj})}$$

mit den Literalen $\mathbf{L_{vw} \in \{ x_1,..., x_n, \bar{x}_1,..., \bar{x}_n\}}$ darstellt und die Realisierungskosten

$$\mathbf{Y_y = \Psi_{ODER}(m) + \Psi_{UND}(k) + ... + \Psi_{UND}(j)}$$

minimal sind.

Beispiel: DMF

Kostenmaß: Anzahl der auftretenden Gatter

Es sei $\Psi_{UND}(k) = \Psi_{ODER}(k) = k$, k: Anzahl Gattereingänge

Ausdruck

$y_1 = \bar{a}\, b \vee a\, \bar{b}$ $\quad \Upsilon_{y_1} = 2+2+2 = 6$

ist in disjunktiver Minimalform

$\Upsilon'_{y_2} = 6$

$y_2 = \bar{a}\, b \vee a\, b$ jedoch nicht, da y_2 auch kürzer durch

$y_2 = b$ $\quad \Upsilon_{y_2} = 1$

ausgedrückt werden kann.

Konjunktive Minimalform (KMF)

Definition:

Ein Ausdruck in **konjunktiver Minimalform (Abk.: KMF)** ist eine Konjunktion von Disjunktionen

$$\mathbf{y(x_1,...,x_n) = (L_{11} \vee ... \vee L_{1k}) \cdot \;...\; \cdot (L_{m1} \vee ... \vee L_{mj})}$$

mit den Literalen $\mathbf{L_{vw} \in \{x_1 ,..., x_n, \bar{x}_1 ,..., \bar{x}_n\}}$ derart, dass die gesamten Realisierungskosten

$$\mathbf{Y_y = \Psi_{UND}(m) + \Psi_{ODER}(k) + ... + \Psi_{ODER}(j)}$$

minimal sind.

Beispiel: KMF

Es sei $\Psi_{UND}(k) = \Psi_{ODER}(k) = k$, k: Anzahl Gattereingänge

$\Upsilon_{y_1} = 2+2+2 = 6$

$y_1 = (\bar{a} \vee b)\,(a \vee c)$ ist in konjunktiver Minimalform,

$\Upsilon'_{y_2} = 3+1+2+2 = 8$

$y_2' = \bar{a}\,(\bar{a} \vee c)\,(b \vee c)$ jedoch nicht,

da y_2 auch kürzer durch

$y_2 = \bar{a}\,(b \vee c)$ $\quad \Upsilon_{y_2} = 2+1+2 = 5$

ausgedrückt werden kann.

DMF & KMF

Minimalformen sind nicht eindeutig!

Es kann mehrere disjunktive und konjunktive Minimalformen für die gleiche Funktion geben.

Beispiel:

$y = a\,\bar{b} \vee b\,\bar{c} \vee \bar{a}\,c$ und

$y = a\,\bar{c} \vee \bar{b}\,c \vee \bar{a}\,b$

stellen dieselbe Funktion dar, beides sind disjunktive Minimalformen.

Beispiel

Die Kosten für eine disjunktive und eine konjunktive Minimalform derselben Funktion sind im allgemeinen unterschiedlich.

Beispiel:

Es sei $\Psi_{UND}(k) = \Psi_{ODER}(k) = 2\cdot(k+1)$.

$y = a\,b\,c \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ disjunktive Minimalform

mit $\Psi_y = 6 + 8 + 8 = 22$

$y = (\bar{a} \vee b)\,(a \vee \bar{c})\,(\bar{b} \vee c)$ konjunktive Minimalform

mit $\Psi_y = 8 + 6 + 6 + 6 = 26$

Anmerkungen

Das Auffinden einer Minimalform ist insbesondere für Funktionen mit einer größeren Anzahl von Variablen **keine** triviale Aufgabe.

Oft können nur suboptimale Lösungen unter Verwendung von Heuristiken gefunden werden.

Bei Minimierungsverfahren geht man in zwei Schritten vor:

- Es wird eine Menge von **Implikanten** bzw. **Implikate** der Funktion **y** mit einer **möglichst geringen Anzahl von Literalen** gebildet.
- Aus dieser Menge wird eine **möglichst geringe Anzahl von Implikanten bzw. Implikate** herausgesucht, deren Disjunktion bzw. Konjuktion die Funktion **y** ergeben.

3.1.6 Funktionsdarstellung im Würfelkalkül

Ein Produktterm **K** lässt sich auch im sogenannten Würfelkalkül beschreiben.

Ein Würfel $\mathbf{C := (c_1, ..., c_n) \in \{0, 1, –\}^n}$ wird durch den Produktterm K wie folgt bestimmt:

$$\mathbf{c_i} := \begin{cases} \mathbf{0}, \text{ falls das Literal } \mathbf{\bar{x}_i} \text{ in } \mathbf{K} \text{ vorkommt} \\ \mathbf{1}, \text{ falls das Literal } \mathbf{x_i} \text{ in } \mathbf{K} \text{ vorkommt} \\ –, \text{ falls die Variable } \mathbf{x_i} \text{ in } \mathbf{K} \text{ nicht vorkommt} \end{cases}$$

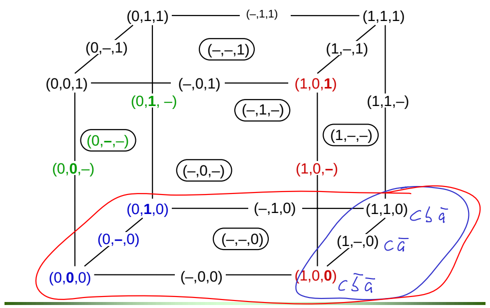
Es seien die Variablen $\mathbf{x_1,...,x_6}$ gegeben.

Dem Produktterm $\mathbf{K = x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_5 \wedge x_6}$ ist der Würfel $\mathbf{C = (–,1,0,–,0,1)}$ zugeordnet.

Würfelkalkül (1)

- Ein n-Tupel $\mathbf{(c_1, ..., c_n)}$, das an keiner Stelle ein "–" besitzt, beschreibt einen 0-dimensionalen Würfel, also einen Punkt.
- Ein n-Tupel, das an $\mathbf{m \le n}$ Stellen ein "–" besitzt, ist ein *m*-dimensionaler Würfel.
- Der Begriff Würfel lässt sich für $\mathbf{n = 3}$ besonders leicht veranschaulichen.

Würfelkalkül (2)



Würfelkalkül (3)

- Jeder der acht möglichen Minterme von (x_1, x_2, x_3) repräsentiert eine Ecke eines Würfels.
- Zwischen zwei Mintermen (Ecken) wird eine Kante gezogen, wenn sie sich genau in einem Literal unterscheiden.
- Entsprechend werden die sechs Flächen aus den Kanten gebildet.
- Der gesamte Kubus wird durch den Würfel (–, –, –) beschrieben.

Würfelkalkül (4)

- Der *n*-dimensionale Würfel (–,…,–) heißt **Universum**.
- Jeder Würfel $C := (c_1, …, c_n)$, der genau $m \le n$ Komponenten mit c_i = "–" enthält, bildet einen **m-dimensionalen Unterraum** und somit ebenfalls einen Würfel.
- Jeder Würfel $C := (c_1, …, c_n)$ definiert somit eine Menge von Mintermen (seine Ecken).
- Der Würfel, **(1,-,1)** entspricht z. B. den Mintermen $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ und $x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$

Würfelkalkül (5)

Funktionsdarstellung im Würfelkalkül:

Zur Beschreibung einer Funktion y zeichnet man im Universum diejenigen Eckpunkte aus, die den Mintermen entsprechen.

Anwendung des Würfelkalküls:

Consensus-Verfahren zur Minimierung Boolescher Funktionen.

Prinzip:

Spannen Minterme einer Funktion einen größeren Unterraum auf, kann dieser als Würfel einfacher dargestellt werden.

Beispiel: **(1,1,1)** und **(1,0,1)** ⇒ **(1,-,1)**

Weitere Definitionen

- Ein Würfel $A := (a_1, …, a_n)$ **enthält** („überdeckt") den Würfel $B := (b_1, …, b_n)$, in Zeichen: $B \subseteq A$, wenn in jeder Komponente $(a_i = b_i)$ oder a_i = "–" gilt.

  Beispiel: A: **(1,-,-)**
  B: **(1,0,0)** A enthält B

- Die Würfelmenge, bzw. der Würfel, $\boldsymbol{C} := (C_1, …, C_m)$ ist eine **Überdeckung** eines Würfels A, in Zeichen: $A \subseteq \boldsymbol{C}$, wenn alle Minterme von A durch mindestens einen Würfel in $\boldsymbol{C}$ überdeckt werden.

Da jeder Würfel in der Überdeckung einem Produktterm entspricht, repräsentiert eine Überdeckung eine Boolesche Funktion als Disjunktion dieser Produktterme.

Beispiel

$f(a,b,c) = a\ \overline{b}$

Würfel	$(1,0,-)$
enthält	$(1,0,1)$
Würfelmenge	$\{(1,0,1), (1,0,0)\}$
überdeckt	$\{(1,0,-)\}$

Weitere Definitionen

Schnittmenge zweier Würfel:

Gegeben: zwei Würfel $A := (a_1, \dots, a_n)$ und $B := (b_1, \dots, b_n)$.
Dann sei der Würfel $C = A \cap B = \{c_1,\dots,c_n\}$ mit $k \in \{1,\dots,n\}$ wie folgt definiert:

Wenn	$a_k = 1$ und	$b_k \in \{1,-\}$	oder	
	$b_k = 1$ und	$a_k \in \{1,-\}$,	dann	$c_k = 1$
Wenn	$a_k = 0$ und	$b_k \in \{0,-\}$	oder	
	$b_k = 0$ und	$a_k \in \{0,-\}$,	dann	$c_k = 0$
Wenn	$a_k = -$ und	$b_k = -$,	dann	$c_k = -$

Anderenfalls existiert die Schnittmenge zweier Würfel nicht

Beispiele als Aufgabe: A ∩ B = ??

A: **(1,-,1)**
B: **(-,1,1)**

$\Rightarrow$ $A \cap B =$ **(1,1,1)**

A: **(0,-,0)**
B: **(-,-,0)**

$\Rightarrow$ $A \cap B =$ **(0,-,0)**

A: **(0,-,1)**
B: **(-,-,0)**

$\Rightarrow$ Schnittmenge existiert nicht