Vorlesungsgliederung

- Kapitel 1: Einführung
- Kapitel 2: Zahlen- und Zeichendarstellung
- Kapitel 3: Schaltnetze
- Kapitel 4: Schaltwerke
- Kapitel 5: Rechnerarithmetik

Offene Fragen vom 15.11.05

① Frage: Gibt es in der BA mindestens ein inverses Element $\bar{a}$ zu a oder genau eines?

Antwort: Aus den "es existiert ein..."-Axiomen H3, H4 für Einselement, Nullelement und inverse Elemente lässt sich Eindeutigkeit ableiten!

Beweis: • Einselement
- Es seien e_1, e_2 verschiedene Einselemente
- $a \otimes e_1 = a$ (H3) $\rightarrow$ insbesondere $e_2 \otimes e_1 = e_2$ (1)
- $a \otimes e_2 = a$ (H3) $\rightarrow$ " $e_1 \otimes e_2 = e_1$ (2)
- (1), (2): $e_1 = e_2$

• Nullelement

↳ Beweis über Dualität

- Inverses Element $\bar{a}$ zu a
  - Es seien $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ verschiedene inverse Elemente zu a

$$a \otimes \bar{a}_1 = u \quad (H4) \qquad a \otimes \bar{a}_2 = u \quad (H4)$$

$$a \oplus \bar{a}_1 = e \quad (H4) \qquad a \oplus \bar{a}_2 = e \quad (H4)$$

  - H2 (Distr.) $\bar{a}_1 \otimes \underbrace{(a \oplus \bar{a}_2)}_{e} = \underbrace{(\bar{a}_1 \otimes a)}_{u} \oplus (\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2)$

$$\Big\downarrow H3 \qquad\qquad \Big\downarrow$$

$$\bar{a}_1 \quad = \quad \bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2 \quad (1)$$

  - H2 $\bar{a}_2 \otimes (a \oplus \bar{a}_1) = (\bar{a}_2 \otimes a) \oplus (\bar{a}_2 \otimes \bar{a}_1)$

$$\Big\downarrow$$

$$\bar{a}_2 \quad = \quad \bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2 \quad (2)$$

  - (1)(2) $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ $\square$

② Frage: kann man $a \wedge 0 = 0$ ($a \vee 1 = 1$) aus $H_0 \dots H_4$ herleiten?

Antwort: Ja!

Beweis: – Ass., Idempotenz (Lösung)

$$
\begin{aligned}
- \; & a \wedge 0 \\
&= a \wedge (a \wedge \bar{a}) && H4 \\
&= (a \wedge a) \wedge \bar{a} && \text{Ass. } a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \\
&= a \wedge \bar{a} && \text{Idempotenz } a \wedge a = a \\
&= 0 && H4
\end{aligned}
$$

Wdh. 3.1.2 Schaltalgebra

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

Boolesche Algebra	**Schaltalgebra**
V	$\{0,1\}$
$\oplus$	$\vee$
$\otimes$	$\wedge$
$\mathbf{n}$	0
$\mathbf{e}$	1
$\bar{a}$	$\bar{a}$

Disjunktion

Konjunktion

Schreibweise: $a + b$ für $a \vee b$

$a \,\&\, b$ für $a \wedge b$

Wdh. Schaltalgebra

Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:

H0: **Abgeschlossenheit**

H1:
$$a \vee b = b \vee a$$
$$a \wedge b = b \wedge a$$

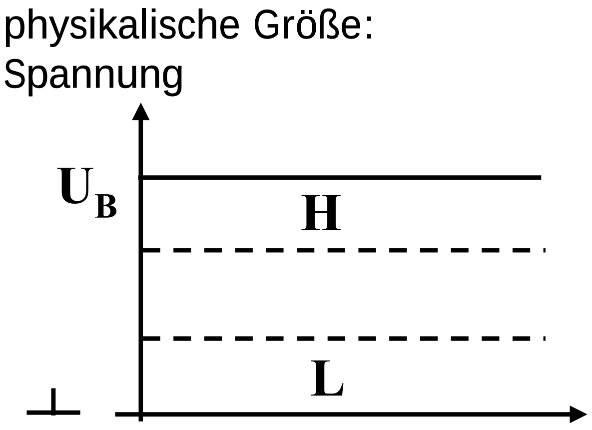
H2:
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

H3:
$$a \vee 0 = a$$
$$a \wedge 1 = a$$

H4:
$$a \wedge \overline{a} = 0$$
$$a \vee \overline{a} = 1$$

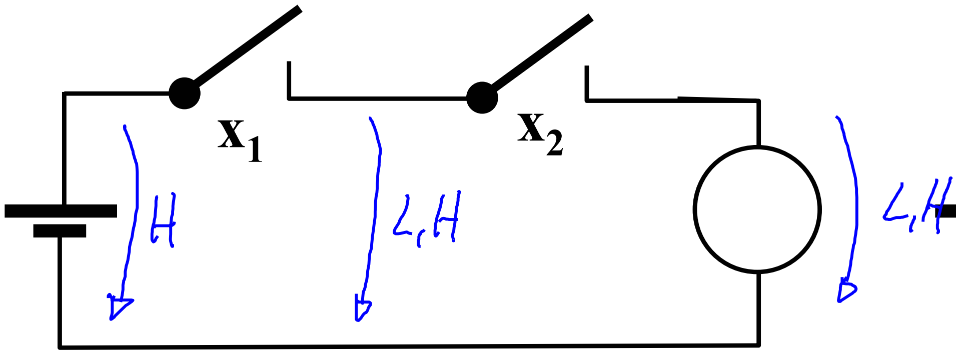
Schaltalgebra (1)

Zweiwertige Signaldarstellung:

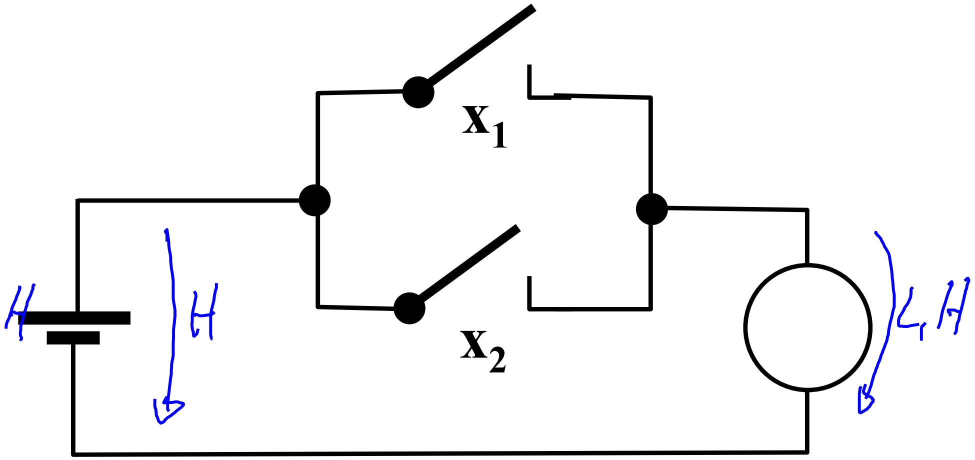


Schaltalgebra (2)

Operationen:



Serienschaltung (ser)



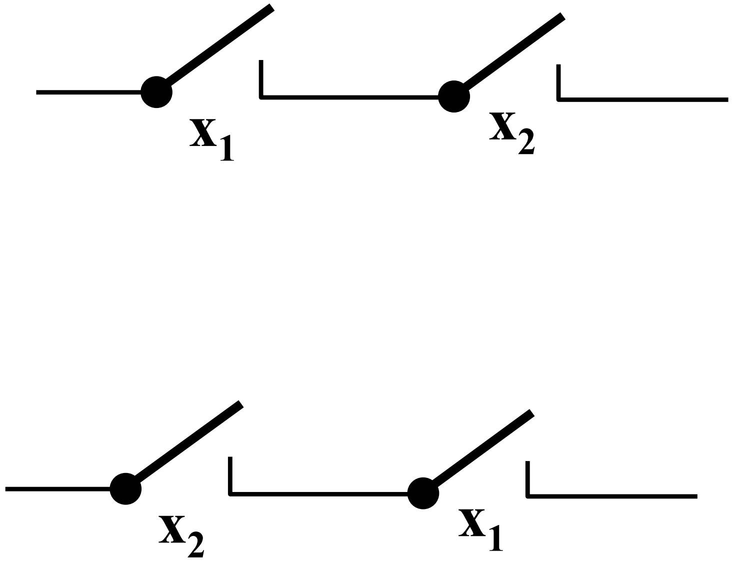
Parallelschaltung (par)

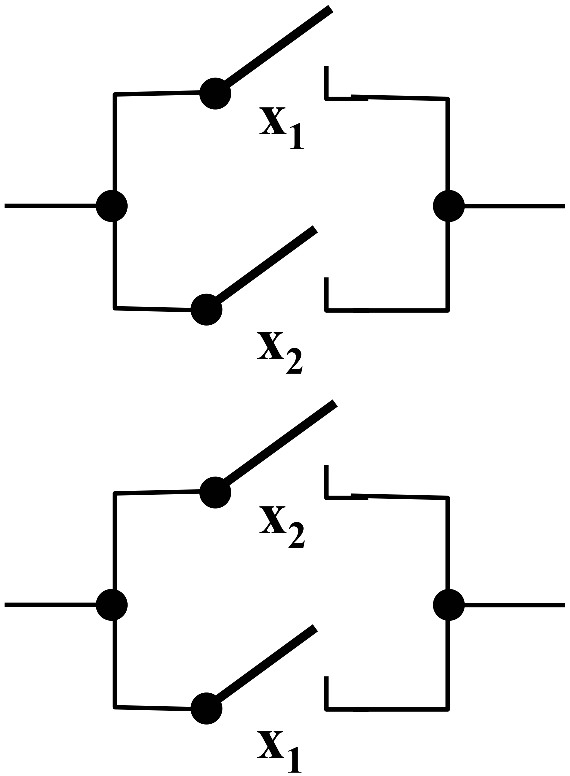
H0: Abgeschlossenheit

$x_1 \text{ ser } x_2 \in \{ L, H \}$ $\qquad$ $x_1 \text{ par } x_2 \in \{ L, H \}$

Schaltalgebra (3)

H1: Kommutativgesetze



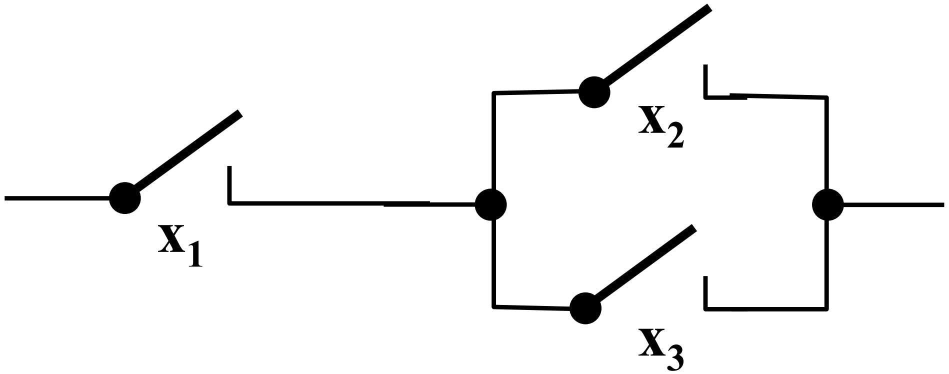


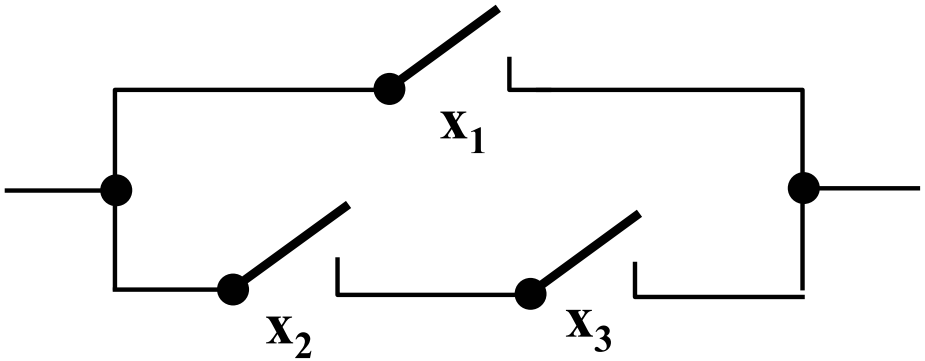
x_1 ser x_2 = x_1 ser x_2

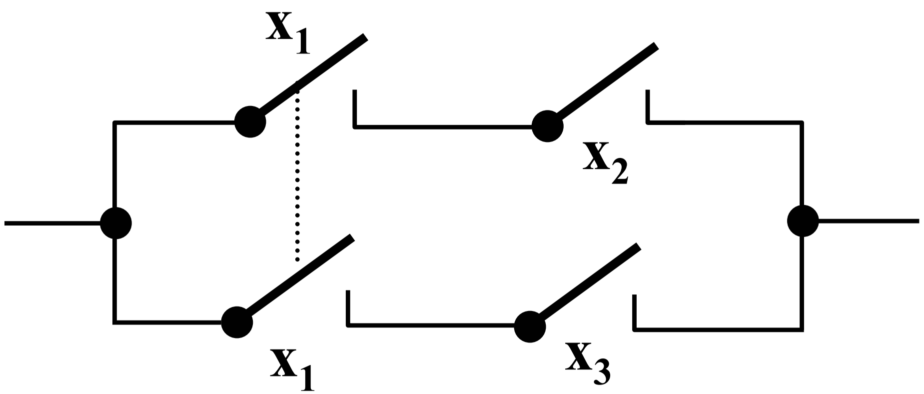
x_1 par x_2 = x_2 par x1

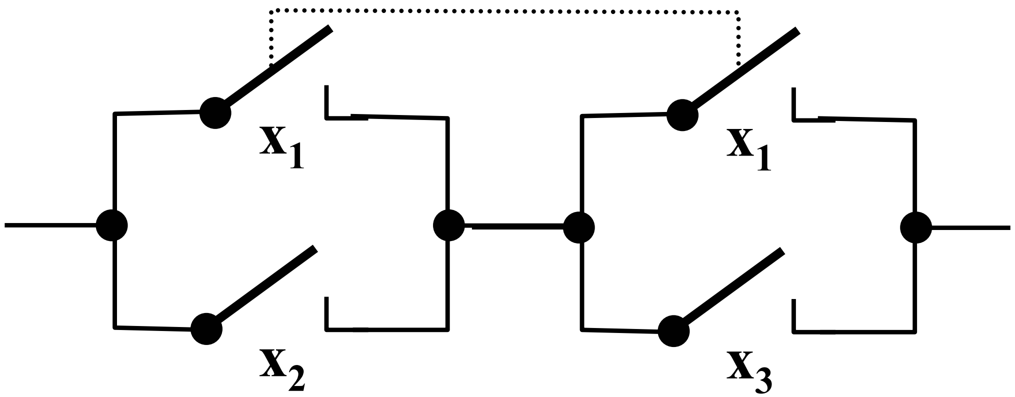
Schaltalgebra (4)

H2: Distributivgesetz







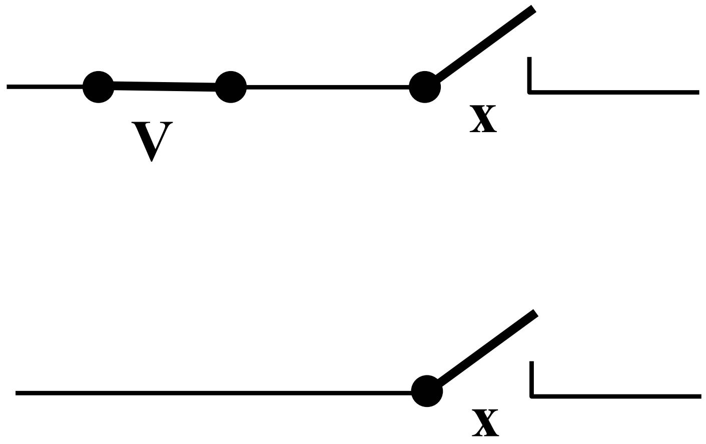


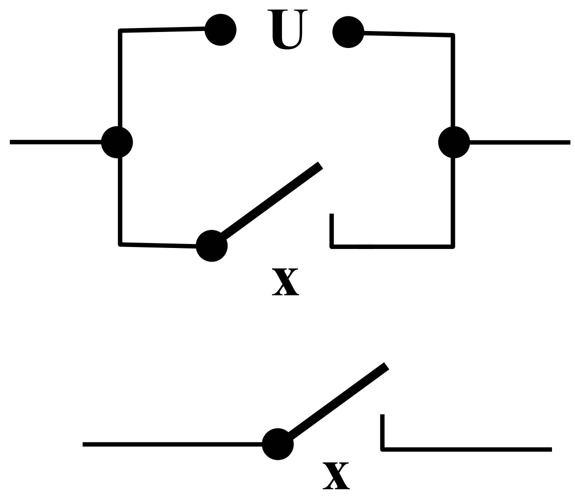
x_1 ser (x_2 par x_3) =
(x_1 ser x_2) par (x_1 ser x_3)

x_1 par (x_2 ser x_3) =
(x_1 par x_2) ser (x_1 par x_3)

Schaltalgebra (5)

H3: Neutrale Elemente





x ser V = x

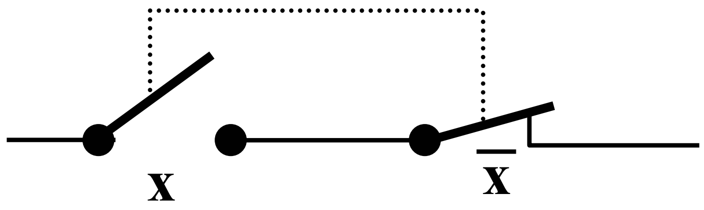
V: Dauernde Verbindung

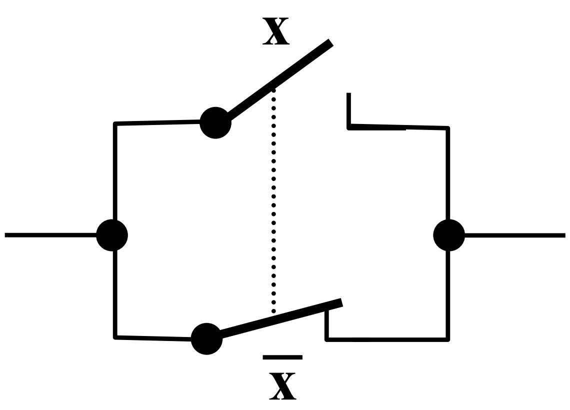
x par U = x

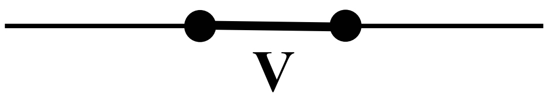
U: Dauernde Unterbrechung

Schaltalgebra (6)

H4: Inverse Elemente







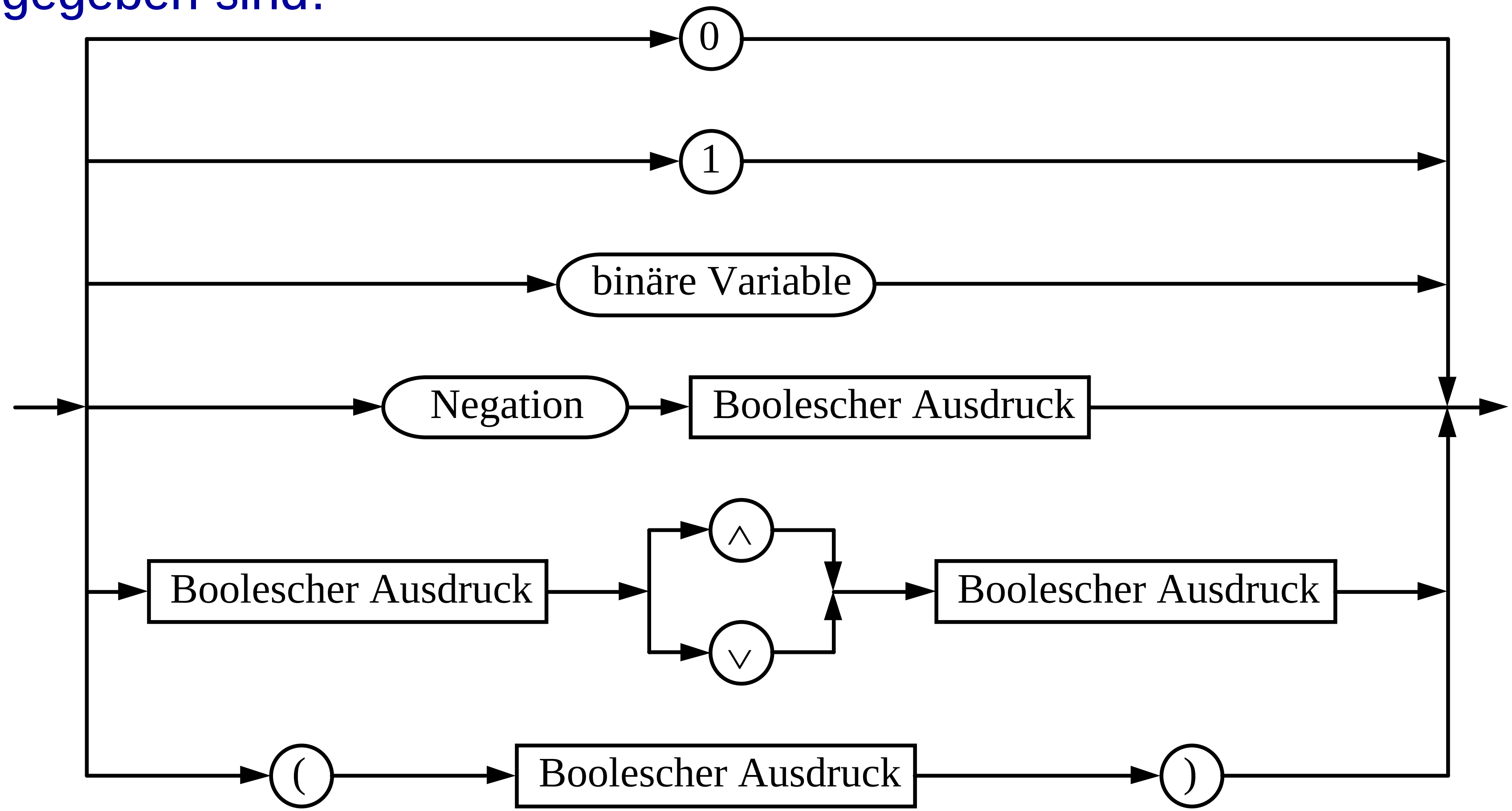
$x \text{ ser } \bar{x} = U$

$x \text{ par } \bar{x} = V$

Voraussetzung: Ideales, gleichzeitiges Schalten

Boolescher Ausdruck (1)

Ein Boolescher Ausdruck ist eine Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren $\wedge$ und $\vee$ und Klammern besteht und syntaktische Regeln erfüllt, die durch folgendes Syntaxdiagramm gegeben sind:



Boolescher Ausdruck (2)

Beispiele:

syntaktisch korrekte Boolesche Ausdrücke: $\mathbf{a \vee b,\ 0,\ (\ \bar{a} \wedge b\ ) \vee c}$

keine Booleschen Ausdrücke, da syntaktisch **nicht korrekt**:

$\mathbf{a \vee \vee a,\ 1\ 0,\ \ (\ ) \vee c}$

Für die Konstanten 0 und 1 verwendet man in der Schaltalgebra manchmal auch in Anlehnung an die Aussagenalgebra die Bezeichnung **Wahrheitswerte:**

0 : falsch   1 : wahr

Ein Boolescher Ausdruck hat in der Regel zunächst keinen Wahrheitswert, da er binäre Variable enthalten kann

Erst durch **Belegung der binären Variablen** mit Wahrheitswerten erhält der Boolesche Ausdruck einen Wahrheitswert

Definitionen

- Die Belegung einer Menge von binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten bezeichnet man als **Interpretation**
- Die Interpretation eines Booleschen Ausdrucks liefert eine **Aussage**, die entweder wahr oder falsch ist
- Verschiedene Interpretationen eines Booleschen Ausdrucks können zu dem selben Wahrheitswert führen
- Ein Boolescher Ausdruck, bei dem **alle** möglichen Interpretationen zum Wahrheitswert „wahr“ führen, heißt **Tautologie**.

Beispiel: $a \vee \overline{a}$ ist eine Tautologie

3.1.3 Boolesche Funktionen

Gegeben: Tupel von binären Variablen $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Definition:

Eine (n-stellige) **Boolesche Funktion** ordnet jeder möglichen Wahrheitswertbelegung dieser Variablen genau einen Wahrheitswert zu:

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

Wie viele Belegungen gibt es?

$\mathbf{2^n}$ Belegungen

Wie viele verschiedene n-stellige Funktionen gibt es?

$\mathbf{2^{(2^n)}}$ Funktionen

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & & \vdots \\ \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_1 \\ \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_0 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{w = 2^n \text{ Werte}}$

Jede Variable zwei Werte

$\downarrow$

n Variablen

$\downarrow$

$w = 2^n$ Werte

- Für jeden Eingangswert 2 Ausgangswerte

$\downarrow$

$2^w = 2^{(2^n)}$ Ausgangswerte

$\hat{=}$ verschiedene Fkt.

Einstellige Boolesche Funktionen

Eine einstellige Boolesche Funktion

$$\mathbf{f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}}$$

ordnet jedem Operanden aus dem Definitionsbereich {0,1} einen Funktionswert aus dem Wertebereich {0,1} zu

a	0	1	
f	0	0	$\mathbf{f = 0}$
f	0	1	$\mathbf{f = a}$
f	1	0	$\mathbf{f = \overline{a}}$
f	1	1	$\mathbf{f = 1}$

Zweistellige Boolesche Funktionen

$$\mathbf{f : \{0,1\} \ x \ \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}}$$

Darstellung boolescher Funktionen

- durch eine Funktionstabelle
- durch einen algebraischen Ausdruck (symbolische Form)

Beispiel:

Funktionstabelle

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

symbolische Form

$$\mathbf{f = a \wedge b}$$

16 mögliche zweistellige boolesche Funktionen

x_1 x_0	0011 0101	verbale Form	symbolische Darstellung	Bezeichnung
f_0	0000	konstant 0	0	
f_1	0001	x_1 und x_0	$x_1 \wedge x_0$	Konjunktion
f_2	0010	nicht x_0 aber x_1	$x_1 \wedge \overline{x}_0$	Inhibition
f_3	0011	identisch x_1	x_1	Identität
f_4	0100	nicht x_1, aber x_0	$\overline{x}_1 \wedge x_0$	Inhibition
f_5	0101	identisch x_0	x_0	Identität
f_6	0110	x_1 ungleich x_0	$x_1 \not\leftrightarrow x_0$	Antivalenz
f_7	0111	x_1 oder x_0	$x_1 \vee x_0$	Disjunktion
f_8	1000	nicht (x_1 oder x_0)	$x_1 \overline{\vee} x_0$	NOR-Funktion
f_9	1001	x_1 gleich x_0	$x_1 \leftrightarrow x_0$	Äquivalenz
f_{10}	1010	nicht x_0	$\overline{x}_0$	Negation
f_{11}	1011	wenn x_0, dann x_1	$x_0 \rightarrow x_1$	Implikation
f_{12}	1100	nicht x_1	$\overline{x}_1$	Negation
f_{13}	1101	wenn x_1, dann x_0	$x_1 \rightarrow x_0$	Implikation
f_{14}	1110	nicht (x_1 und x_0)	$x_1 \overline{\wedge} x_0$	NAND-Funktion
f_{15}	1111	konstant 1	1	Tautologie

Boolesche Funktionen

Wie kommt man von der symbolischen Darstellung zur Funktionstabelle ?

Durch Auswertung des symbolischen Ausdrucks

Konvention:

- Negation vor Konjunktion und Konjunktion vor Disjunktion
- Durch Klammern kann eine andere Reihenfolge der Auswertung festgelegt werden

Vollständige Operatorensysteme

Definition:

Ein System von Operatoren, mit dem alle booleschen Funktionen dargestellt werden können, heißt **vollständiges Operatorensystem**

Die Operatoren ($\wedge$, $\vee$, $\overline{}$) bilden ein vollständiges Operatorensystem

Beispiel:

$a \leftrightarrow b$ liefert das gleiche Ergebnis wie $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$

$\leftrightarrow$ lässt sich durch die Grundoperationen $\wedge$, $\vee$ und $\overline{}$ ersetzen

Vollständige Operatorensysteme

Operatoren-system	Darstellung der ...		
	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge, \vee, \overline{\ })$	$\overline{a}$	$a \wedge b$	$a \vee b$
$(\wedge, \overline{\ })$	$\overline{a}$	$a \wedge b$	$\overline{\overline{a} \wedge \overline{b}}$
$(\vee, \overline{\ })$	$\overline{a}$	$\overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$	$a \vee b$
$(\overline{\wedge})$	$a \mathbin{\overline{\wedge}} a$	$(a \mathbin{\overline{\wedge}} b) \mathbin{\overline{\wedge}} (a \mathbin{\overline{\wedge}} b)$	$(a \mathbin{\overline{\wedge}} a) \mathbin{\overline{\wedge}} (b \mathbin{\overline{\wedge}} b)$
$(\overline{\vee})$	$a \mathbin{\overline{\vee}} a$	$(a \mathbin{\overline{\vee}} a) \mathbin{\overline{\vee}} (b \mathbin{\overline{\vee}} b)$	$(a \mathbin{\overline{\vee}} b) \mathbin{\overline{\vee}} (a \mathbin{\overline{\vee}} b)$
$(\wedge, \not\leftrightarrow)$	$a \not\leftrightarrow 1$	$a \wedge b$	$a \not\leftrightarrow b \not\leftrightarrow (a \wedge b)$

$\bar\wedge$: $\quad a \,\bar\wedge\, b = \overline{a \wedge b}$ NAND

- $a \,\bar\wedge\, a = \overline{a \wedge a} = \bar a$
- $(a \,\bar\wedge\, b) \,\bar\wedge\, (a \,\bar\wedge\, b) = \overline{\overline{a \wedge b} \wedge \overline{a \wedge b}} = \overline{\overline{a \wedge b}} = a \wedge b$
- $(a \,\bar\wedge\, a) \,\bar\wedge\, (b \,\bar\wedge\, b) = \overline{\overline{a \wedge a} \wedge \overline{b \wedge b}} = \overline{\bar a \wedge \bar b} = a \vee b$

$\bar\vee$: ....

$\wedge, \not\leftrightarrow$:
- Negation $\quad a \not\leftrightarrow 1 = \bar a \wedge 1 \vee \underbrace{a \wedge \bar 1}_{0} = \bar a \wedge 1 = \bar a$
- Disjunktion $\quad a \not\leftrightarrow b \not\leftrightarrow (a \wedge b)$

$$= a \not\leftrightarrow (b \wedge \overline{a \wedge b} \vee \bar b \wedge a \wedge b)$$
$$= a \not\leftrightarrow (\bar a \wedge b)$$
$$= a \wedge \overline{\bar a \wedge b} \vee \bar a \wedge \bar a \wedge b$$
$$= a \vee a \bar b \vee \bar a b$$
$$= a \vee b$$

Alternative Disjunktion:

$$a \vee b = \overline{\overline{a \vee b}}$$
$$= \overline{\bar a \wedge \bar b}$$
$$= \overline{(a \not\leftrightarrow 1) \wedge (b \not\leftrightarrow 1)}$$
$$= (a \not\leftrightarrow 1) \wedge$$

Tautologie (1)

Wann repräsentieren zwei Ausdrücke A und B dieselbe Boolesche Funktion?

Gleichbedeutend:

Ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie?

Beispiel: Gegeben zwei Boolesche Funktionen:

$$f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$$
$$f_2(a,b) = (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$$

Ist f_1 identisch mit f_2 oder

Ist $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) \leftrightarrow (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$ eine Tautologie?

Tautologie (2)

Beweis mit Hilfe von Funktionstabellen oder mittels Umformungen von Ausdrücken unter Verwendung der algebraischen Gesetze.

Zwei Ausdrücke sind äquivalent, falls die Ergebnisse ihrer Auswertung für alle möglichen Kombinationen von Variablenbelegungen identisch sind.

$a\ b$	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	$(a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$	$f_1 \leftrightarrow f_2$
0 0	1	1	1
0 1	0	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

Tautologie (3)

Mittels algebraischer Überführung der Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
&(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) && \quad H2 \\
&= [(a \wedge b) \vee \bar{a}] \wedge [(a \wedge b) \vee \bar{b}] && \quad H2 \\
&= [\underbrace{(a \vee \bar{a})}_{H4:\,1} \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [(a \vee \bar{b}) \wedge \underbrace{(b \vee \bar{b})}_{H4:\,1}] \\
&= [\underbrace{1 \wedge (b \vee \bar{a})}_{b \vee \bar{a}\ (H3)}] \wedge [\underbrace{(a \vee \bar{b}) \wedge 1}_{a \vee \bar{b}\ (H3)}] \\
&= (b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee \bar{b}) \\
&= (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})
\end{aligned}
$$

Mittels algebraischer Umformung der Äquivalenz:

$$f_1 \leftrightarrow f_2 = (f_1 \wedge f_2) \vee (\overline{f_1} \wedge \overline{f_2})$$

$$\overset{!}{=} 1$$

3.1.4 Normalformen

Eine Boolesche Funktion kann durch verschiedene boolesche Ausdrücke beschrieben werden.

Eine Standarddarstellung Boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem ($\wedge$, $\vee$, $\overline{}$) ist die **konjunktive (KNF)** und die **disjunktive Normalform (DNF)**.

Definition 2.2:

Ein **Literal** L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation $\overline{x}_i$ d. h. $L_i \in \{x_i, \overline{x}_i\}$

Produktterme

Definition 2.3:

Ein **Produktterm $K(x_1,\ldots,x_m)$** ist die Konjunktion von Literalen $\bigwedge_{i=1}^{m} L_i = L_1 \wedge \ldots \wedge L_m$ oder die Konstante "$\mathbf{0}$" oder "$\mathbf{1}$"

Beispiele: $a \wedge b$ $\quad \overline{a} \wedge b$ $\quad a \wedge \overline{b}$ $\quad \overline{a} \wedge \overline{b}$

$a \wedge a \wedge b$ $\quad \overline{x_i} \wedge x_i$

Jeder Produktterm $K(x_1,\ldots,x_m) = \bigwedge_{i=1}^{m} L_i$ kann so dargestellt werden, dass eine Variable $\mathbf{x}$ in höchstens einem Literal vorkommt.

Literale und Produktterme

Falls $L_h = x$ und $L_j = x$ (mehrfach bejahtes Auftauchen)

$$\Rightarrow \quad L_h \wedge L_j = x$$

$$\Rightarrow \quad K(x_1,\ldots,x_m) = \bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} L_i$$

$\Rightarrow$ Mehrfaches Auftauchen von x kann nach Idempotenzgesetz gestrichen werden.

Falls $L_h = x$ und $L_j = \overline{x}$ (gemischtes bejahtes und negiertes Auftreten)

$$\Rightarrow L_h \wedge L_j = 0$$

$\Rightarrow K(x_1,\ldots,x_m) = 0$ (Produktterm wird zu 0)

Implikant und Minterm

Definition 2.4:

Ein Produktterm $\mathbf{K(x_1,\ldots,x_n)}$ heißt **Implikant** einer Booleschen Funktion $\mathbf{y(x_1,\ldots,x_n)}$, wenn $\mathbf{K \rightarrow y}$

Das heißt, für jede Belegung $B \in \{0,1\}^n$ gilt: wenn $\mathbf{K(B) = 1}$, dann ist auch $\mathbf{y(B) = 1}$

$y(a,b,c) = a\bar{b} \lor \bar{a}bc$

↳ $k(a,b,c) = a\bar{b}$ $\Rightarrow$ Nicht eindeutig!

Definition 2.5:

Ein Implikant einer Booleschen Funktion $\mathbf{y(x_1,\ldots,x_n)}$ heißt **Minterm**, wenn jede Variable $\mathbf{x_i}$ der Funktion $\mathbf{y}$ im Implikanten als Literal genau einmal vorkommt

Minterme

- Minterme einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_4)$:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4$$

- Keine Minterme der Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_4)$:

$$x_1 \wedge x_2$$

$$x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_3 \wedge x_4$$

Disjunktive Normalform (1)

Damit lässt sich die disjunktive Normalform definieren:

Definition 2.6:

Es sei eine Boolesche Funktion $y(x_1,\dots,x_n)$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt **disjunktive Normalform (DNF)** der Funktion y, wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von Mintermen K_i besteht:

$$y = K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_k \qquad , \quad k \leq 2^n-1$$

Es darf dabei keine zwei Konjunktionen K_i, K_j mit $i \neq j$ geben, die zueinander äquivalent sind.

Disjunktive Normalform (2)

Beispiele:

$f_1(a,b,c) = a\,b\,c \vee a\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c$

ist in DNF.

$f_2(a,b,c) = a\,b\,c \vee a\,\overline{b} \vee c\,a\,b \vee a\,(b\,c \vee \overline{b}\,\overline{c})$

ist nicht in DNF, denn:

- $a\,\overline{b}$ enthält nicht alle Variable
- $a\,b\,c$ und $c\,a\,b$ sind äquivalent
- $a\,(b\,c \vee \overline{b}\,\overline{c})$ ist keine reine Konjunktion

Disjunktive Normalform (3)

Aufgabe:

Ist $\mathbf{f(a,b,c) = a\,\overline{b}\,c \vee a\,a\,\overline{b}\,c \vee \overline{b}\,c}$

in DNF?

Welche Produktterme sind Minterme?

DNF? **Nein**, denn:

$\mathbf{\overline{b}\,c}$ enthält nicht alle Variable, ist kein Minterm

$\mathbf{a\,\overline{b}\,c}$ und $\mathbf{a\,a\,\overline{b}\,c}$ sind äquivalent

$\mathbf{a\,a\,\overline{b}\,c}$ ist kein Minterm

Disjunktive Normalform (4)

Aufgabe:

$$f(a,b,c) = a\,\bar{b}\,c \vee a\,a\,\bar{b}\,c \vee \bar{b}\,c$$

in DNF überführen

$$= a\bar{b}c \vee a\bar{b}c \vee \bar{b}c = a\bar{b}c \vee \bar{b}c$$

$$= \bar{b}c(a \vee 1) = \bar{b}c$$

$$= \bar{b}c(a \vee \bar{a})$$

$$= a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}c \quad \text{DNF}$$