

- Kapitel 1: Einführung
- Kapitel 2: Zahlen- und Zeichendarstellung
- Kapitel 3: Schaltnetze
- Kapitel 4: Schaltwerke
- Kapitel 5: Rechnerarithmetik

Wdh. 3.1.2 Schaltalgebra

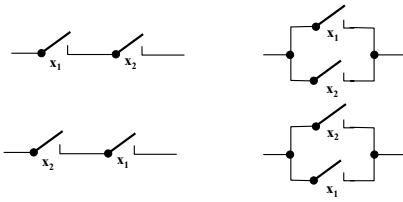
Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

Boolesche Algebra	Schaltalgebra	
\vee	$\{0,1\}$	
\oplus	\vee	Disjunktion
\otimes	\wedge	Konjunktion
0	0	
e	1	
\bar{a}	\bar{a}	

Schreibweise: $a + b$ für $a \vee b$
 $a \& b$ für $a \wedge b$

Schaltalgebra (3)

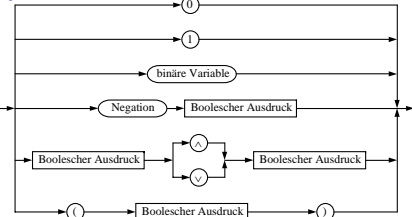
H1: Kommutativgesetz



$x_1 \text{ ser } x_2 = x_2 \text{ ser } x_1$ $x_1 \text{ par } x_2 = x_2 \text{ par } x_1$

Boolescher Ausdruck (1)

Ein Boolescher Ausdruck ist eine Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren \wedge und \vee und Klammern besteht und syntaktische Regeln erfüllt, die durch folgendes Syntaxdiagramm gegeben sind:



Offene Frage vom 18.11.05

① Frage: Gibt es in der BA mindestens ein inverses Element zu a oder genau eines?

Antwort: Aus der "es existiert ein..."-Axiom H3, H4 für Einselement, Nullelement und inverses Element lässt sich Eindeutigkeit ableiten!

Beweis: • Einselement
 - Es seien e_1, e_2 verschiedene Einselemente
 $a \otimes e_1 = a$ (H3) \rightarrow insbesondere $e_2 \otimes e_1 = e_2$ (1)
 $a \otimes e_2 = a$ (H3) \rightarrow * $e_1 \otimes e_2 = e_1$ (2)
 \rightarrow (1),(2): $e_1 = e_2$

• Nullelement
 \rightarrow Beweis über Dualität

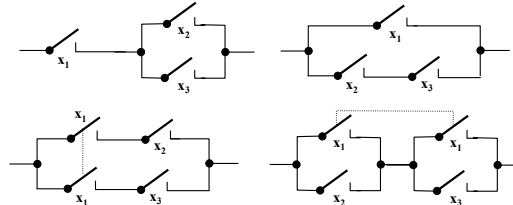
Wdh. Schaltalgebra

Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:

- H0: Abgeschlossenheit**
H1: $a \vee b = b \vee a$
 $a \wedge b = b \wedge a$
H2: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
H3: $a \vee 0 = a$
 $a \wedge 1 = a$
H4: $a \wedge \bar{a} = 0$
 $a \vee \bar{a} = 1$

Schaltalgebra (4)

H2: Distributivgesetz



$x_1 \text{ ser } (x_2 \text{ par } x_3) = (x_1 \text{ ser } x_2) \text{ par } (x_1 \text{ ser } x_3)$ $x_1 \text{ par } (x_2 \text{ ser } x_3) = (x_1 \text{ par } x_2) \text{ ser } (x_1 \text{ par } x_3)$

Boolescher Ausdruck (2)

Beispiele:

syntaktisch korrekte Boolesche Ausdrücke: $a \vee b, 0, (\bar{a} \wedge b) \vee c$
 keine Booleschen Ausdrücke, da syntaktisch **nicht korrekt**:
 $a \vee \vee a, 1, 0, () \vee c$

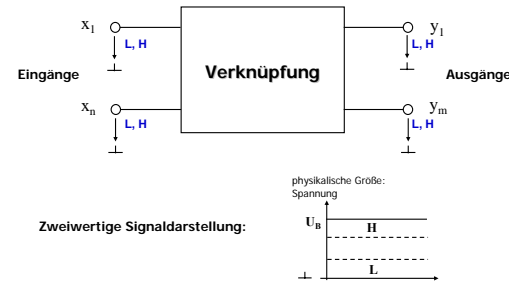
Für die Konstanten 0 und 1 verwendet man in der Schaltalgebra manchmal auch in Anlehnung an die Aussagenalgebra die Bezeichnung **Wahrheitswerte**:
 0: falsch 1: wahr

Ein Boolescher Ausdruck hat in der Regel zunächst keinen Wahrheitswert, da er binäre Variable enthalten kann

Erst durch **Belegung der binären Variablen** mit Wahrheitswerten erhält der Boolesche Ausdruck einen Wahrheitswert

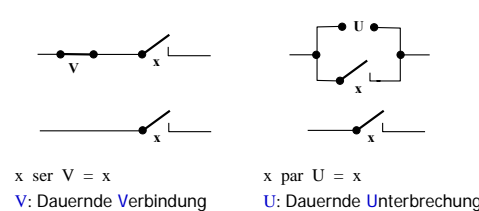
• Inverses Element \bar{a} zu a
 - Es sein \bar{a}_1, \bar{a}_2 verschiedene inverse Elemente zu a
 $a \otimes \bar{a}_1 = 0$ (H4) $a \otimes \bar{a}_2 = 0$ (H4)
 $a \oplus \bar{a}_1 = e$ (H4) $a \oplus \bar{a}_2 = e$ (H4)
 - H2 (Distrib.) $\bar{a}_1 \otimes (a \oplus \bar{a}_2) = (\bar{a}_1 \otimes a) \oplus (\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2)$
 \downarrow H3 $\bar{a}_1 \otimes e = \bar{a}_1$ (1)
 \downarrow H3 $\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2 = 0$ (2)
 \rightarrow (1),(2): $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ \square

Schaltalgebra (1)



Schaltalgebra (5)

H3: Neutrale Elemente



$x \text{ ser } V = x$ $x \text{ par } U = x$
V: Dauernde Verbindung **U: Dauernde Unterbrechung**

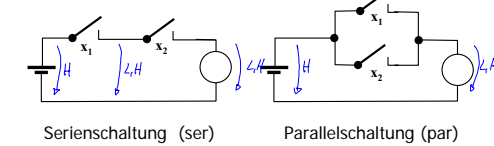
Definitionen

- Die Belegung einer Menge von binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten bezeichnet man als **Interpretation**
 - Die Interpretation eines Booleschen Ausdrucks liefert eine **Aussage**, die entweder wahr oder falsch ist
 - Verschiedene Interpretationen eines Booleschen Ausdrucks können zu dem selben Wahrheitswert führen
 - Ein Boolescher Ausdruck, bei dem **alle** möglichen Interpretationen zum Wahrheitswert „wahr“ führen, heißt **Tautologie**.
- Beispiel:** $a \vee \bar{a}$ ist eine Tautologie

② Frage: Kann man $a \wedge 0 = 0$ ($a \vee 1 = 1$) aus H0...H4 herleiten?
 Antwort: \bar{a} !
 Beweis: - Ass., Idempotenz (Axiom)
 $- a \wedge 0$
 $= a \wedge (a \wedge \bar{a})$ } H4
 $= (a \wedge a) \wedge \bar{a}$ } Ass. $a \wedge (a \wedge \bar{a}) = (a \wedge \bar{a}) \wedge a$
 $= a \wedge \bar{a}$ } Idempotenz $a \wedge a = a$
 $= 0$ } H4

Schaltalgebra (2)

Operationen:

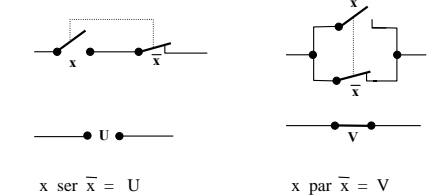


H0: Abgeschlossenheit

$x_1 \text{ ser } x_2 \in \{L, H\}$ $x_1 \text{ par } x_2 \in \{L, H\}$

Schaltalgebra (6)

H4: Inverse Elemente



$x \text{ ser } \bar{x} = U$ $x \text{ par } \bar{x} = V$

Voraussetzung: Ideales, gleichzeitiges Schalten

3.1.3 Boolesche Funktionen

Gegeben: Tupel von binären Variablen (x_1, x_2, \dots, x_n)

Definition:

Eine (n-stellige) **Boolesche Funktion** ordnet jeder möglichen Wahrheitswertbelegung dieser Variablen genau einen Wahrheitswert zu:

$$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

Wie viele Belegungen gibt es?

2^n Belegungen

Wie viele verschiedene n-stellige Funktionen gibt es?

$2^{(2^n)}$ Funktionen

Einstellige Boolesche Funktionen

Eine einstellige Boolesche Funktion

$$f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

ordnet jedem Operanden aus dem Definitionsbereich $\{0,1\}$ einen Funktionswert aus dem Wertebereich $\{0,1\}$ zu

a	0	1	
f	0	0	f = 0
f	0	1	f = a
f	1	0	f = \bar{a}
f	1	1	f = 1

$$\begin{matrix} \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & x_1 \\ \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & & x_0 \end{matrix}$$

Jede Variable
 zweifach
 u. variabel
 $w = 2^n$ Werte
 $w = 2^m$ Ausg.werte
 \subseteq verschiedene Fkts

Boolesche Funktionen

Wie kommt man von der symbolischen Darstellung zur Funktionstabelle?

Durch Auswertung des symbolischen Ausdrucks

Konvention:

- Negation vor Konjunktion und Konjunktion vor Disjunktion

- Durch Klammern kann eine andere Reihenfolge der Auswertung festgelegt werden

Tautologie (1)

Wann repräsentieren zwei Ausdrücke A und B dieselbe Boolesche Funktion?

Gleichbedeutend:

Ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie?

Beispiel: Gegeben zwei Boolesche Funktionen:

$$f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$f_2(a,b) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$$

Ist f_1 identisch mit f_2 oder

Ist $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \leftrightarrow (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$ eine Tautologie?

3.1.4 Normalformen

Eine Boolesche Funktion kann durch verschiedene boolesche Ausdrücke beschrieben werden.

Eine Standarddarstellung Boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem $(\wedge, \vee, \bar{})$ ist die **konjunktive (KNF)** und die **disjunktive Normalform (DNF)**.

Definition 2.2:

Ein **Literal** L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation \bar{x}_i d. h. $L_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$

Vollständige Operatorensysteme

Definition:

Ein System von Operatoren, mit dem alle booleschen Funktionen dargestellt werden können, heißt **vollständiges Operatorensystem**

Die Operatoren $(\wedge, \vee, \bar{})$ bilden ein vollständiges Operatorensystem

Beispiel:

$a \leftrightarrow b$ liefert das gleiche Ergebnis wie $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$

\leftrightarrow lässt sich durch die Grundoperationen \wedge, \vee und $\bar{}$ ersetzen

Tautologie (2)

Beweis mit Hilfe von Funktionstabellen oder mittels Umformungen von Ausdrücken unter Verwendung der algebraischen Gesetze.

Zwei Ausdrücke sind äquivalent, falls die Ergebnisse ihrer Auswertung für alle möglichen Kombinationen von Variablenbelegungen identisch sind.

a b	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	$(a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$	$f_1 \leftrightarrow f_2$
0 0	1	1	1
0 1	0	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

Produktterme

Definition 2.3:

Ein **Produktterm** $K(x_1, \dots, x_m)$ ist die Konjunktion von

Literalen $\bigwedge_{i=1}^m L_i = L_1 \wedge \dots \wedge L_m$ oder die Konstante "0" oder "1"

Beispiele: $a \wedge b$ $\bar{a} \wedge b$ $a \wedge \bar{b}$ $\bar{a} \wedge \bar{b}$
 $a \wedge a \wedge b$ $\bar{x}_i \wedge x_i$

Jeder Produktterm $K(x_1, \dots, x_m) = \bigwedge_{i=1}^m L_i$ kann so dargestellt werden, dass eine Variable x in höchstens einem Literal vorkommt.

Zweistellige Boolesche Funktionen

$$f: \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

Darstellung boolescher Funktionen

- durch eine Funktionstabelle
- durch einen algebraischen Ausdruck (symbolische Form)

Beispiel: Funktionstabelle symbolische Form

a	b	f	$f = a \wedge b$
0	0	0	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	

Vollständige Operatorensysteme

Operatorensystem	Darstellung der ...		
	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge, \vee, \bar{})$	$\bar{}$	$a \wedge b$	$a \vee b$
$(\wedge, \bar{})$	$\bar{}$	$a \wedge b$	$a \wedge \bar{b}$
$(\vee, \bar{})$	$\bar{}$	$a \vee \bar{b}$	$a \vee b$
$(\bar{})$	$a \bar{a}$	$(a \bar{b}) \bar{(a \bar{b})}$	$(a \bar{a}) \bar{(b \bar{b})}$
$(\bar{})$	$a \bar{a}$	$(a \bar{a}) \bar{(b \bar{b})}$	$(a \bar{a}) \bar{(a \bar{b})}$
$(\wedge, \leftrightarrow)$	$a \leftrightarrow 1$	$a \wedge b$	$a \leftrightarrow b \leftrightarrow (a \wedge b)$

Tautologie (3)

Mittels algebraischer Überführung der Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 & (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \\
 &= [(a \wedge b) \vee \bar{a}] \wedge [(a \wedge b) \vee \bar{b}] \quad H2 \\
 &= [\underbrace{(a \vee \bar{a})}_{H1} \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [\underbrace{(a \vee \bar{b})}_{H1} \wedge (b \vee \bar{b})] \quad H2 \\
 &= [1 \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [(a \vee \bar{b}) \wedge 1] \\
 &= (b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee \bar{b}) \\
 &= (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})
 \end{aligned}$$

Literale und Produktterme

Falls $L_h = x$ und $L_j = \bar{x}$ (mehrfach bejahtes Auftauchen)

$$\Rightarrow L_h \wedge L_j = x$$

$$\Rightarrow K(x_1, \dots, x_m) = \bigwedge_{i=1}^m L_i$$

\Rightarrow Mehrfaches Auftauchen von x kann nach Idempotenzgesetz gestrichen werden.

Falls $L_h = x$ und $L_j = \bar{x}$ (gemischtes bejahtes und negiertes Auftreten)

$$\Rightarrow L_h \wedge L_j = 0$$

$$\Rightarrow K(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad (\text{Produktterm wird zu } 0)$$

16 mögliche zweistellige boolesche Funktionen

x_1	0011	verbale Form	symbolische Darstellung	Bezeichnung
x_2	0101	konstant 0	0	
f_1	0000	x_1 und x_2	$x_1 \wedge x_2$	Konjunktion
f_2	0001	nicht x_2 aber x_1	$x_1 \wedge \bar{x}_2$	Inhibition
f_3	0010	identisch x_1	x_1	Identität
f_4	0011	nicht x_2 aber x_2	$\bar{x}_1 \wedge x_2$	Inhibition
f_5	0101	identisch x_2	x_2	Identität
f_6	0110	x_1 ungleich x_2	$x_1 \oplus x_2$	Antivalenz
f_7	0111	x_1 oder x_2	$x_1 \vee x_2$	Disjunktion
f_8	1000	nicht (x_1 oder x_2)	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	NOR-Funktion
f_9	1001	x_1 gleich x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$	Äquivalenz
f_{10}	1010	nicht x_1	\bar{x}_1	Negation
f_{11}	1011	wenn x_2 dann x_1	$x_2 \rightarrow x_1$	Implikation
f_{12}	1100	nicht x_1	\bar{x}_1	Negation
f_{13}	1101	wenn x_1 dann x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	Implikation
f_{14}	1110	nicht (x_1 und x_2)	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	NAND-Funktion
f_{15}	1111	konstant 1	1	Tautologie

$\pi: a \pi b = \bar{a} \bar{b}$ NAND
 $\cdot a \pi a = \bar{a} \bar{a} = \bar{a}$
 $\cdot (a \pi b) \pi (a \pi b) = \overline{\bar{a} \bar{b} \wedge \bar{a} \bar{b}} = \overline{\bar{a} \bar{b}} = a \vee b$
 $\cdot (a \pi a) \pi (b \pi b) = \overline{\bar{a} \bar{a} \wedge \bar{b} \bar{b}} = \overline{\bar{a} \bar{b}} = a \vee b$

$\vee: \dots$
 $\wedge, \leftrightarrow: \text{Mischform } a \leftrightarrow b = \bar{a} \bar{a} \vee a \bar{a} = \bar{a} \bar{a} \vee a \bar{a}$
 $\text{Disjunktion: } a \leftrightarrow b \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$
 $= a \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$
 $= a \leftrightarrow (a \wedge b)$
 $= a \bar{a} \bar{b} \vee a \bar{a} b$
 $= a \bar{b} \vee a b$
 $= a \vee b$

Mittels algebraischer Umformung der Aussagen:

$$\begin{aligned}
 f_1 \leftrightarrow f_2 &= (f_1 \wedge f_2) \vee (\bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Implikant und Minterm

Definition 2.4:

Ein Produktterm $K(x_1, \dots, x_n)$ heißt **Implikant** einer Booleschen Funktion $y(x_1, \dots, x_n)$, wenn $K \rightarrow y$

Das heißt, für jede Belegung $B \in \{0,1\}^n$ gilt: wenn $K(B) = 1$, dann ist auch $y(B) = 1$
 $y(a,b,c) = a \bar{b} \vee a \bar{c}$
 $\hookrightarrow K(a,b,c) = a \bar{b} \Rightarrow$ nicht erdächtig!

Definition 2.5:

Ein Implikant einer Booleschen Funktion $y(x_1, \dots, x_n)$ heißt **Minterm**, wenn jede Variable x_i der Funktion y im Implikanten als Literal **genau einmal** vorkommt

Minterme

□ Minterme einer Booleschen Funktion $y(x_1, \dots, x_4)$:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

□ Keine Minterme der Booleschen Funktion $y(x_1, \dots, x_4)$:

$$x_1 \wedge x_2$$

$$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_3 \wedge x_4$$

Disjunktive Normalform (1)

Damit lässt sich die disjunktive Normalform definieren:

Definition 2.6:

Es sei eine Boolesche Funktion $y(x_1, \dots, x_n)$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt **disjunktive Normalform (DNF)** der Funktion y , wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von Mintermen K_i besteht:

$$y = K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_k, \quad k \leq 2^n - 1$$

Es darf dabei keine zwei Konjunktionen K_i, K_j mit $i \neq j$ geben, die zueinander äquivalent sind.

Disjunktive Normalform (2)

Beispiele:

$$f_1(a, b, c) = a b c \vee a \bar{b} c \vee \bar{a} \bar{b} c$$

ist in DNF.

$$f_2(a, b, c) = a b c \vee a \bar{b} \vee c a b \vee a (b c \vee \bar{b} \bar{c})$$

ist nicht in DNF, denn:

- $a \bar{b}$ enthält nicht alle Variable
- $a b c$ und $c a b$ sind äquivalent
- $a (b c \vee \bar{b} \bar{c})$ ist keine reine Konjunktion

Disjunktive Normalform (3)

Aufgabe:

Ist $f(a, b, c) = a \bar{b} c \vee a a \bar{b} c \vee \bar{b} c$

in DNF?

Welche Produktterme sind Minterme?

DNF? **Nein**, denn:

$\bar{b} c$ enthält nicht alle Variable, ist kein Minterm

$a \bar{b} c$ und $a a \bar{b} c$ sind äquivalent

$a a \bar{b} c$ ist kein Minterm

Disjunktive Normalform (4)

Aufgabe:

$$f(a, b, c) = a \bar{b} c \vee a a \bar{b} c \vee \bar{b} c$$

in DNF überführen

$$= a \bar{b} c \vee a \bar{b} c \vee \bar{b} c = a \bar{b} c \vee \bar{b} c$$

$$= \bar{b} c (a \vee 1) = \bar{b} c$$

$$= \bar{b} c (a \vee \bar{a})$$

$$= a \bar{b} c \vee \bar{a} \bar{b} c \text{ DNF}$$