

- Kapitel 1: Einführung
- Kapitel 2: Zahlen- und Zeichendarstellung
- Kapitel 3: Schaltnetze
- Kapitel 4: Schaltwerke
- Kapitel 5: Rechnerarithmetik

• Inverses Element  $\bar{a}$  zu  $a$   
 - Es sein  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  verschiedene inverse Elemente zu  $a$   
 $a \otimes \bar{a}_1 = u$  (H1)     $a \otimes \bar{a}_2 = u$  (H4)  
 $a \oplus \bar{a}_1 = e$  (H4)     $a \oplus \bar{a}_2 = e$  (H4)  
 - H2 (Distrib.)  $\bar{a}_1 \otimes (a \oplus \bar{a}_2) = (\bar{a}_1 \otimes a) \oplus (\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2)$   
 $\downarrow$  H3     $\bar{a}_1 \otimes a = u$      $\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2 = ?$   
 $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$  (1)  
 - H2  $\bar{a}_2 \otimes (a \oplus \bar{a}_1) = (\bar{a}_2 \otimes a) \oplus (\bar{a}_2 \otimes \bar{a}_1)$   
 $\downarrow$      $\bar{a}_2 \otimes a = u$      $\bar{a}_2 \otimes \bar{a}_1 = ?$   
 $\bar{a}_2 = \bar{a}_1$  (2)     $\square$

## Wdh. 3.1.2 Schaltalgebra

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

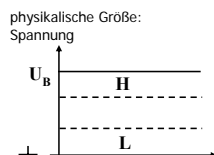
Boolesche Algebra	Schaltalgebra
$\vee$	$\{0,1\}$
$\oplus$	$\vee$ ← Disjunktion
$\otimes$	$\wedge$ ← Konjunktion
$0$	$0$
$e$	$1$
$\bar{a}$	$\bar{a}$

Schreibweise:  $a + b$  für  $a \vee b$   
 $a \& b$  für  $a \wedge b$

## Schaltalgebra (1)



Zweiwertige Signaldarstellung:



① Frage: Gibt es in der BA mindestens ein inverses Element  $\bar{a}$  zu  $a$  oder genau eines?

Antwort: Aus der "es existiert ein..."-Axiome H3, H4 für Einselement, Nullelement und inverse Elemente lässt sich Eindeutigkeit ableiten!

Beweis: • Einselement  
 - Es seien  $e_1, e_2$  verschiedene Einselemente  
 $a \otimes e_1 = a$  (H3)  $\rightarrow$  insbesondere  $e_2 \otimes e_1 = e_2$  (1)  
 $a \otimes e_2 = a$  (H3)  $\rightarrow$  "  $e_1 \otimes e_2 = e_1$  (2)  
 - (1),(2):  $e_1 = e_2$

• Nullelement  
 $\rightarrow$  Beweis über Dualität

② Frage: kann man  $a \wedge 0 = 0$  ( $a \vee 1 = 1$ ) aus H0...H4 herleiten?

Antwort: Ja!

Beweis: - Ass., Idempotenz (Übung)

-  $a \wedge 0$   
 $= a \wedge (a \wedge \bar{a})$  } H4  
 $= (a \wedge a) \wedge \bar{a}$  } Ass.  $a \wedge (a \wedge \bar{a}) = (a \wedge a) \wedge \bar{a}$   
 $= a \wedge \bar{a}$  } Idempotenz  $a \wedge a = a$   
 $= 0$  } H4

## Wdh. Schaltalgebra

Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:

H0: Abgeschlossenheit

H1:  $a \vee b = b \vee a$   
 $a \wedge b = b \wedge a$

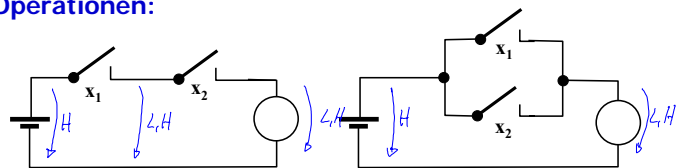
H2:  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$   
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

H3:  $a \vee 0 = a$   
 $a \wedge 1 = a$

H4:  $a \wedge \bar{a} = 0$   
 $a \vee \bar{a} = 1$

## Schaltalgebra (2)

Operationen:



Serienschaltung (ser)

Parallelschaltung (par)

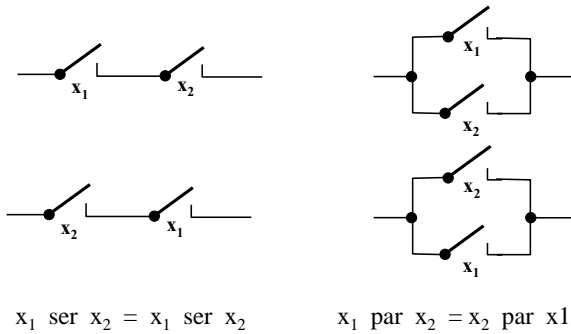
H0: Abgeschlossenheit

$x_1$  ser  $x_2 \in \{L, H\}$

$x_1$  par  $x_2 \in \{L, H\}$

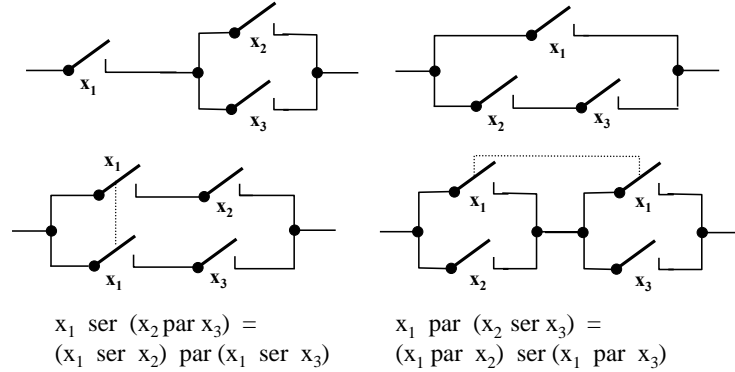
# Schaltalgebra (3)

## H1: Kommutativgesetz



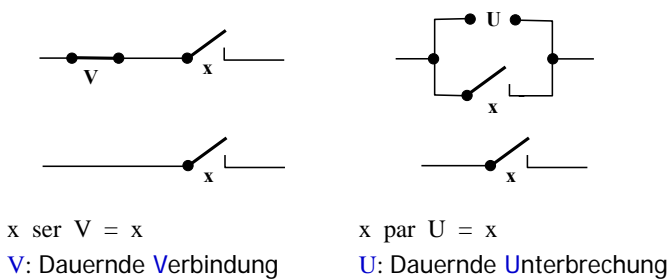
# Schaltalgebra (4)

## H2: Distributivgesetz



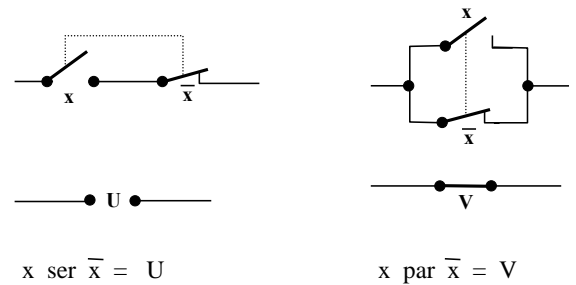
# Schaltalgebra (5)

## H3: Neutrale Elemente



# Schaltalgebra (6)

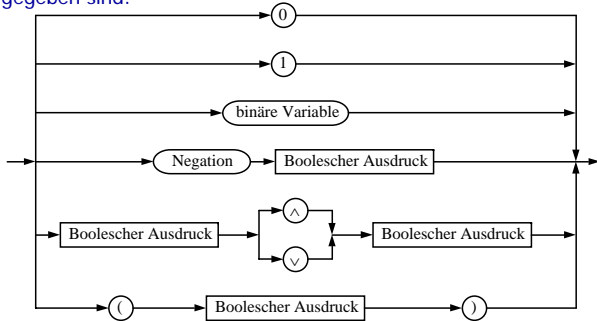
## H4: Inverse Elemente



Voraussetzung: Ideales, gleichzeitiges Schalten

# Boolescher Ausdruck (1)

Ein Boolescher Ausdruck ist eine Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren  $\wedge$  und  $\vee$  und Klammern besteht und syntaktische Regeln erfüllt, die durch folgendes Syntaxdiagramm gegeben sind:



## Definitionen

- Die Belegung einer Menge von binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten bezeichnet man als **Interpretation**
- Die Interpretation eines Booleschen Ausdrucks liefert eine **Aussage**, die entweder wahr oder falsch ist
- Verschiedene Interpretationen eines Booleschen Ausdrucks können zu dem selben Wahrheitswert führen
- Ein Boolescher Ausdruck, bei dem **alle** möglichen Interpretationen zum Wahrheitswert „wahr“ führen, heißt **Tautologie**.

**Beispiel:**  $a \vee \bar{a}$  ist eine Tautologie

# Boolescher Ausdruck (2)

### Beispiele:

syntaktisch korrekte Boolesche Ausdrücke:  $a \vee b, 0, (a \wedge b) \vee c$

keine Booleschen Ausdrücke, da syntaktisch **nicht korrekt**:  
 $a \vee \vee a, 1 0, () \vee c$

Für die Konstanten 0 und 1 verwendet man in der Schaltalgebra manchmal auch in Anlehnung an die Aussagenalgebra die Bezeichnung **Wahrheitswerte**:

0 : falsch      1 : wahr

Ein Boolescher Ausdruck hat in der Regel zunächst keinen Wahrheitswert, da er binäre Variable enthalten kann

Erst durch **Belegung der binären Variablen** mit Wahrheitswerten erhält der Boolesche Ausdruck einen Wahrheitswert

## 3.1.3 Boolesche Funktionen

Gegeben: Tupel von binären Variablen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

### Definition:

Eine (n-stellige) **Boolesche Funktion** ordnet jeder möglichen Wahrheitswertbelegung dieser Variablen genau einen Wahrheitswert zu:

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

Wie viele Belegungen gibt es?

$$2^n \text{ Belegungen}$$

Wie viele verschiedene n-stellige Funktionen gibt es?

$$2^{(2^n)} \text{ Funktionen}$$

# Einstellige Boolesche Funktionen

Eine einstellige Boolesche Funktion

$$f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

ordnet jedem Operanden aus dem Definitionsbereich  $\{0,1\}$  einen Funktionswert aus dem Wertebereich  $\{0,1\}$  zu

<b>a</b>	0	1	
<b>f</b>	0	0	<b>f = 0</b>
<b>f</b>	0	1	<b>f = a</b>
<b>f</b>	1	0	<b>f = <math>\bar{a}</math></b>
<b>f</b>	1	1	<b>f = 1</b>

$$\begin{matrix} \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & x_2 \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & x_1 \\ \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_0 \end{matrix}$$

Jede Variable zwei Werte  
 $\downarrow$   
 4 Variablen  
 $\downarrow$   
 $W = 2^n$  Werte

Für jeden Eingangswert 2 Ausgangswerte  
 $\downarrow$   
 $2^W = 2^{(2^n)}$  Ausgabewerte  
 $\subseteq$  verschiedene Fkt

## Zweistellige Boolesche Funktionen

$$f: \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

### Darstellung boolescher Funktionen

- > durch eine Funktionstabelle
- > durch einen algebraischen Ausdruck (symbolische Form)

**Beispiel:** Funktionstabelle      symbolische Form

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**f = a ∧ b**

## 16 mögliche zweistellige boolesche Funktionen

$x_1$	$x_0$	0011	0101	verbale Form	symbolische Darstellung	Bezeichnung
$f_0$	0000	konstant 0	0		0	
$f_1$	0001	$x_1$ und $x_0$	$x_1 \wedge x_0$		$x_1 \wedge x_0$	Konjunktion
$f_2$	0010	nicht $x_0$ aber $x_1$	$x_1 \wedge \bar{x}_0$		$x_1 \wedge \bar{x}_0$	Inhibition
$f_3$	0011	identisch $x_1$	$x_1$		$x_1$	Identität
$f_4$	0100	nicht $x_1$ , aber $x_0$	$\bar{x}_1 \wedge x_0$		$\bar{x}_1 \wedge x_0$	Inhibition
$f_5$	0101	identisch $x_0$	$x_0$		$x_0$	Identität
$f_6$	0110	$x_1$ ungleich $x_0$	$x_1 \oplus x_0$		$x_1 \oplus x_0$	Antivalenz
$f_7$	0111	$x_1$ oder $x_0$	$x_1 \vee x_0$		$x_1 \vee x_0$	Disjunktion
$f_8$	1000	nicht ( $x_1$ oder $x_0$ )	$x_1 \bar{\vee} x_0$		$x_1 \bar{\vee} x_0$	NOR-Funktion
$f_9$	1001	$x_1$ gleich $x_0$	$x_1 \leftrightarrow x_0$		$x_1 \leftrightarrow x_0$	Äquivalenz
$f_{10}$	1010	nicht $x_0$	$\bar{x}_0$		$\bar{x}_0$	Negation
$f_{11}$	1011	wenn $x_0$ , dann $x_1$	$x_0 \rightarrow x_1$		$x_0 \rightarrow x_1$	Implikation
$f_{12}$	1100	nicht $x_1$	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_1$	Negation
$f_{13}$	1101	wenn $x_1$ , dann $x_0$	$x_1 \rightarrow x_0$		$x_1 \rightarrow x_0$	Implikation
$f_{14}$	1110	nicht ( $x_1$ und $x_0$ )	$x_1 \bar{\wedge} x_0$		$x_1 \bar{\wedge} x_0$	NAND-Funktion
$f_{15}$	1111	konstant 1	1		1	Tautologie

## Boolesche Funktionen

Wie kommt man von der symbolischen Darstellung zur Funktionstabelle ?

Durch Auswertung des symbolischen Ausdrucks

### Konvention:

- > Negation vor Konjunktion und Konjunktion vor Disjunktion
- > Durch Klammern kann eine andere Reihenfolge der Auswertung festgelegt werden

## Vollständige Operatorensysteme

### Definition:

Ein System von Operatoren, mit dem alle booleschen Funktionen dargestellt werden können, heißt **vollständiges Operatorensystem**

Die Operatoren  $(\wedge, \vee, \bar{\phantom{x}})$  bilden ein vollständiges Operatorensystem

### Beispiel:

$a \leftrightarrow b$  liefert das gleiche Ergebnis wie  $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$

$\leftrightarrow$  lässt sich durch die Grundoperationen  $\wedge, \vee$  und  $\bar{\phantom{x}}$  ersetzen

## Vollständige Operatorensysteme

Operatorensystem	Darstellung der ...		
	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge, \vee, \bar{\phantom{x}})$	$\bar{a}$	$a \wedge b$	$a \vee b$
$(\wedge, \bar{\phantom{x}})$	$\bar{a}$	$a \wedge b$	$\bar{\bar{a} \wedge \bar{b}}$
$(\vee, \bar{\phantom{x}})$	$\bar{a}$	$\bar{\bar{a} \vee \bar{b}}$	$a \vee b$
$(\bar{\phantom{x}})$	$a \bar{a}$	$(a \bar{a} \wedge b) \bar{\bar{a} \bar{a} \wedge b}$	$(a \bar{a} \wedge a) \bar{\bar{b} \bar{a} \wedge b}$
$(\bar{\phantom{x}})$	$a \bar{a}$	$(a \bar{a} \vee a) \bar{\bar{b} \bar{a} \vee b}$	$(a \bar{a} \vee a) \bar{\bar{a} \bar{b} \vee b}$
$(\wedge, \leftrightarrow)$	$a \leftrightarrow 1$	$a \wedge b$	$a \leftrightarrow b \leftrightarrow (a \wedge b)$

$\neg: a \bar{a} b = \bar{a} \bar{a} b$  NAND  
 $\cdot a \bar{a} a = \bar{a} \bar{a} a = \bar{a}$   
 $\cdot (a \bar{a} b) \bar{a} (a \bar{a} b) = \bar{a} \bar{a} b \bar{a} \bar{a} b = \bar{a} \bar{a} b = \bar{a} b$   
 $\cdot (a \bar{a} a) \bar{a} (a \bar{a} b) = \bar{a} \bar{a} a \bar{a} b = \bar{a} \bar{a} b = \bar{a} b$

$\vee: \dots$   
 $1, \text{ also: } - \text{ Negation } a \leftrightarrow 1 = \bar{a} \bar{a} \vee a \bar{a} \bar{a} = \bar{a} \bar{a} = \bar{a}$   
 $- \text{ Disjunktion } a \leftrightarrow b \leftrightarrow (a \bar{a} b)$   
 $= a \leftrightarrow (a \bar{a} \bar{a} \vee \bar{a} \bar{a} \bar{a} b)$   
 $= a \leftrightarrow (\bar{a} \bar{a} b)$   
 $= a \bar{a} \bar{a} b \vee \bar{a} \bar{a} \bar{a} b$   
 $= a \bar{a} \bar{a} b \vee \bar{a} \bar{a} b$   
 $= a \bar{a} b$

Alternative Disjunktion:  
 $\frac{a \vee b}{=} \frac{\bar{a} \bar{a} b}{=} \frac{\bar{a} \bar{a} \bar{a} b}{=} \frac{(a \leftrightarrow 1) \bar{a} \bar{a} \bar{a} b}{=} (a \leftrightarrow 1) \bar{a} \bar{a} b$

# Tautologie (1)

Wann repräsentieren zwei Ausdrücke A und B dieselbe Boolesche Funktion?

Gleichbedeutend:

Ist  $A \leftrightarrow B$  eine Tautologie?

**Beispiel:** Gegeben zwei Boolesche Funktionen:

$$f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$f_2(a,b) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$$

Ist  $f_1$  identisch mit  $f_2$  oder

Ist  $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \leftrightarrow (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$  eine Tautologie?

# Tautologie (3)

Mittels algebraischer Überführung der Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \\ &= [(a \wedge b) \vee \bar{a}] \wedge [(a \wedge b) \vee \bar{b}] \quad \text{H2} \\ &= [(a \vee \bar{a}) \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [(a \vee \bar{b}) \wedge (b \vee \bar{b})] \quad \text{H4, H1} \\ &= [1 \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [(a \vee \bar{b}) \wedge 1] \quad \text{H3} \\ &= (b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee \bar{b}) \\ &= (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \end{aligned}$$

## 3.1.4 Normalformen

Eine Boolesche Funktion kann durch verschiedene boolesche Ausdrücke beschrieben werden.

Eine Standarddarstellung Boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem  $(\wedge, \vee, \bar{\phantom{x}})$  ist die **konjunktive (KNF)** und die **disjunktive Normalform (DNF)**.

**Definition 2.2:**

Ein **Literal**  $L_i$  ist entweder eine Variable  $x_i$  oder ihre Negation  $\bar{x}_i$  d. h.  $L_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$

## Literale und Produktterme

Falls  $L_h = x$  und  $L_j = x$  (mehrfach bejahtes Auftauchen)

$$\Rightarrow L_h \wedge L_j = x$$

$$\Rightarrow K(x_1, \dots, x_m) = \bigwedge_{i=1}^m L_i$$

$\Rightarrow$  Mehrfaches Auftauchen von  $x$  kann nach Idempotenzgesetz gestrichen werden.

Falls  $L_h = x$  und  $L_j = \bar{x}$  (gemischtes bejahtes und negiertes Auftreten)

$$\Rightarrow L_h \wedge L_j = 0$$

$$\Rightarrow K(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad (\text{Produktterm wird zu } 0)$$

# Tautologie (2)

Beweis mit Hilfe von Funktionstabellen oder mittels Umformungen von Ausdrücken unter Verwendung der algebraischen Gesetze.

Zwei Ausdrücke sind äquivalent, falls die Ergebnisse ihrer Auswertung für alle möglichen Kombinationen von Variablenbelegungen identisch sind.

a b	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	$(a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$	$f_1 \leftrightarrow f_2$
0 0	1	1	1
0 1	0	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

Mittels algebraischer Umformung der Äquivalenz:

$$f_1 \leftrightarrow f_2 = (f_1 \wedge f_2) \vee (\bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2)$$

$$\stackrel{!}{=} 1$$

## Produktterme

**Definition 2.3:**

Ein **Produktterm**  $K(x_1, \dots, x_m)$  ist die Konjunktion von

Literalen  $\bigwedge_{i=1}^m L_i = L_1 \wedge \dots \wedge L_m$  oder die Konstante "0" oder "1"

**Beispiele:**  $a \wedge b$        $\bar{a} \wedge b$        $a \wedge \bar{b}$        $\bar{a} \wedge \bar{b}$

$$a \wedge a \wedge b$$

$$\bar{x}_i \wedge x_i$$

Jeder Produktterm  $K(x_1, \dots, x_m) = \bigwedge_{i=1}^m L_i$  kann so dargestellt werden, dass eine Variable  $x$  in höchstens einem Literal vorkommt.

## Implikant und Minterm

**Definition 2.4:**

Ein Produktterm  $K(x_1, \dots, x_n)$  heißt **Implikant** einer Booleschen Funktion  $y(x_1, \dots, x_n)$ , wenn  $K \rightarrow y$

Das heißt, für jede Belegung  $B \in \{0,1\}^n$  gilt: wenn  $K(B) = 1$ , dann ist auch  $y(B) = 1$

$$y(a,b,c) = a\bar{b} \vee a\bar{b}c$$

$$\hookrightarrow K(a,b,c) = a\bar{b} \Rightarrow \text{nicht erdendig!}$$

**Definition 2.5:**

Ein Implikant einer Booleschen Funktion  $y(x_1, \dots, x_n)$  heißt **Minterm**, wenn jede Variable  $x_i$  der Funktion  $y$  im Implikanten als Literal **genau einmal** vorkommt

# Minterme

□ Minterme einer Booleschen Funktion  $y(x_1, \dots, x_4)$ :

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

□ Keine Minterme der Booleschen Funktion  $y(x_1, \dots, x_4)$ :

$$x_1 \wedge x_2$$

$$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_3 \wedge x_4$$

## Disjunktive Normalform (2)

**Beispiele:**

$$f_1(a,b,c) = abc \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}c$$

ist in DNF.

$$f_2(a,b,c) = abc \vee a\bar{b}c \vee cab \vee a(b \vee \bar{b}\bar{c})$$

ist nicht in DNF, denn:

- $a\bar{b}$  enthält nicht alle Variable
- $abc$  und  $cab$  sind äquivalent
- $a(b \vee \bar{b}\bar{c})$  ist keine reine Konjunktion

## Disjunktive Normalform (4)

**Aufgabe:**

$$f(a,b,c) = a\bar{b}c \vee a\bar{b}c \vee \bar{b}c$$

in DNF überführen

$$= a\bar{b}c \vee a\bar{b}c \vee \bar{b}c = a\bar{b}c \vee \bar{b}c$$

$$= \bar{b}c(a \vee 1) = \bar{b}c$$

$$= \bar{b}c(a \vee \bar{a})$$

$$= a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}c \text{ DNF}$$

# Disjunktive Normalform (1)

Damit lässt sich die disjunktive Normalform definieren:

**Definition 2.6:**

Es sei eine Boolesche Funktion  $y(x_1, \dots, x_n)$  gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt **disjunktive Normalform (DNF)** der Funktion  $y$ , wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von Mintermen  $K_i$  besteht:

$$y = K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_k, \quad k \leq 2^n - 1$$

Es darf dabei keine zwei Konjunktionen  $K_i, K_j$  mit  $i \neq j$  geben, die zueinander äquivalent sind.

## Disjunktive Normalform (3)

**Aufgabe:**

$$\text{Ist } f(a,b,c) = a\bar{b}c \vee a\bar{b}c \vee \bar{b}c$$

in DNF?

Welche Produktterme sind Minterme?

DNF? **Nein**, denn:

$\bar{b}c$  enthält nicht alle Variable, ist kein Minterm

$a\bar{b}c$  und  $aa\bar{b}c$  sind äquivalent

$aa\bar{b}c$  ist kein Minterm