# Wdh. Hammingkode : 2-Bitfehler (2)

- Um 1-Bitfehler von 2-Bitfehlern unterscheiden zu können, fügt man dem Hammingkode ein weiteres Paritätsbit hinzu

**1-Bitfehler:**

- Erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar und korrigierbar durch den Hammingkode

**2-Bitfehler:**

- Nicht erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar durch den Hammingkode, **aber** nicht korrigierbar, da die fehlerhaften Positionen nicht ermittelt werden können

**n-Bitfehler (n>2):** andere Verfahren

Gesamtparität (PB)

- ungerade
  - Ungerade Fehleranzahl (1-Bit-Fehler)
    - Prüfbits
      - $\underline{k=0}$
        - Fehler in PB
          - Daten ok
      - $\underline{k \neq 0}$
        - Position des Fehlers
          - korrigieren
- gerade
  - Gerade Fehleranzahl (0 & 2-Bit-Fehler)
    - Prüfbits
      - $\underline{k=0}$
        - Daten ok
      - $\underline{k \neq 0}$
        - 2-Bit-Fehler
          - nicht korrigierbar

# Wdh. Beispiel 2-Bitfehler (1)

- Fall 1: Kein Fehler

| $m_5$ | $k_4$ | $m_4$ | $m_3$ | $m_2$ | $k_3$ | $m_1$ | $k_2$ | $k_1$ | ***PB*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$k_4k_3k_2k_1 = 0000$

- Fall 2: 1-Bit-Fehler (Fehler im Hamming-Codewort)

0 0 1 0 0 0 1 1 0 0

$k_4k_3k_2k_1 = 0110$

Fehler an 6. Position

- Fall 3: 1-Bit-Fehler (Fehler im Paritätsbit)

0 0 1 1 0 0 1 1 0 1

$k_4k_3k_2k_1 = 0000$

Fehler im Paritätsbit

# Wdh. Beispiel 2-Bitfehler (2)

- Fall 4: 2-Bit-Fehler (2 Fehler im Hamming-Codewort)

0 0 1 0 0 0 0 1 0 0

$k_4 k_3 k_2 k_1 = 0101$
2-Bit-Fehler

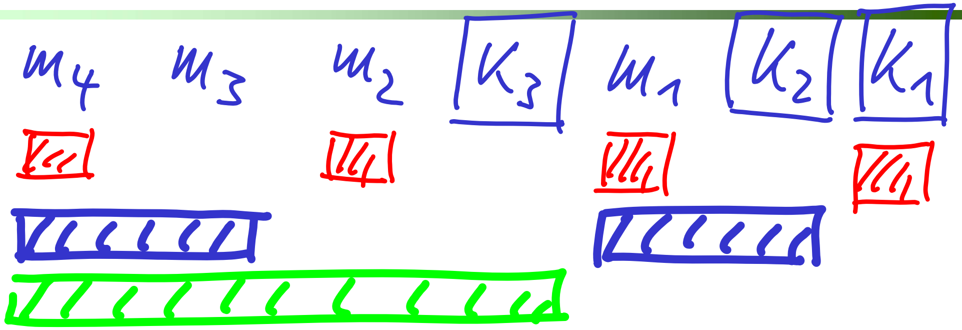
- Fall 5: 2-Bit-Fehler (1 Fehler im Hamming-Codewort, Fehler im Paritätsbit)

0 0 1 0 0 0 1 1 0 1

$k_4 k_3 k_2 k_1 = 0110$
2-Bit-Fehler

# Hammingkode: Zusammenfassung

- An Standard-Codewörter lässt sich ein weiteres Quersummenbit anfügen, so dass Zweibitfehler im Codewort erkennbar werden.
- 32-Bit Wortlänge werden durch 7 Prüfbits zur Einzelfehlerkorrektur und Doppelfehlererkennung ergänzt.
- 64 Bit lange Datenwörter erfordern 8 Korrekturbits.
- Die Algebra endlicher Körper bietet über Generator- und Nullmatrix Verfahren, die zu jedem Datenwort ein Codewort erzeugen.




$$\begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ k_3 \\ m_1 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ m_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ k_3 \\ m_1 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

Generatormatrix

$G$

Nullmatrix

$H$

## Beispiel:

- Datenwort $\underline{DW} = \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, Codewort $\underline{CW} = \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ k_3 \\ m_1 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cancel{0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = H \cdot \underline{CW} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Fehlerhaftes Codewort $\overline{\underline{CW}} = \underline{CW} + \underline{e}_i$, $\underline{e}_i$ ... i-ter Einheitsvektor

- $H \cdot \overline{\underline{CW}} = H(\underline{CW} + \underline{e}_i) = \underbrace{H \cdot \underline{CW}}_{\underline{0}} + H \cdot \underline{e}_i = \underbrace{H(:, i)}_{\text{i-te Spalte von } H}$

**Beispiel:**

$$
\begin{bmatrix} K_3 \\ K_2 \\ K_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow
$$

Fehler in 3. Pos.

$$
= H \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \underbrace{H \cdot \underline{cw}}_{\underline{0}} + H \cdot \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

# Vorlesungsgliederung

- Kapitel 1: Einführung
- Kapitel 2: Zahlen- und Zeichendarstellung
- Kapitel 3: Schaltnetze
- Kapitel 4: Schaltwerke
- Kapitel 5: Rechnerarithmetik

# 3. Schaltnetze

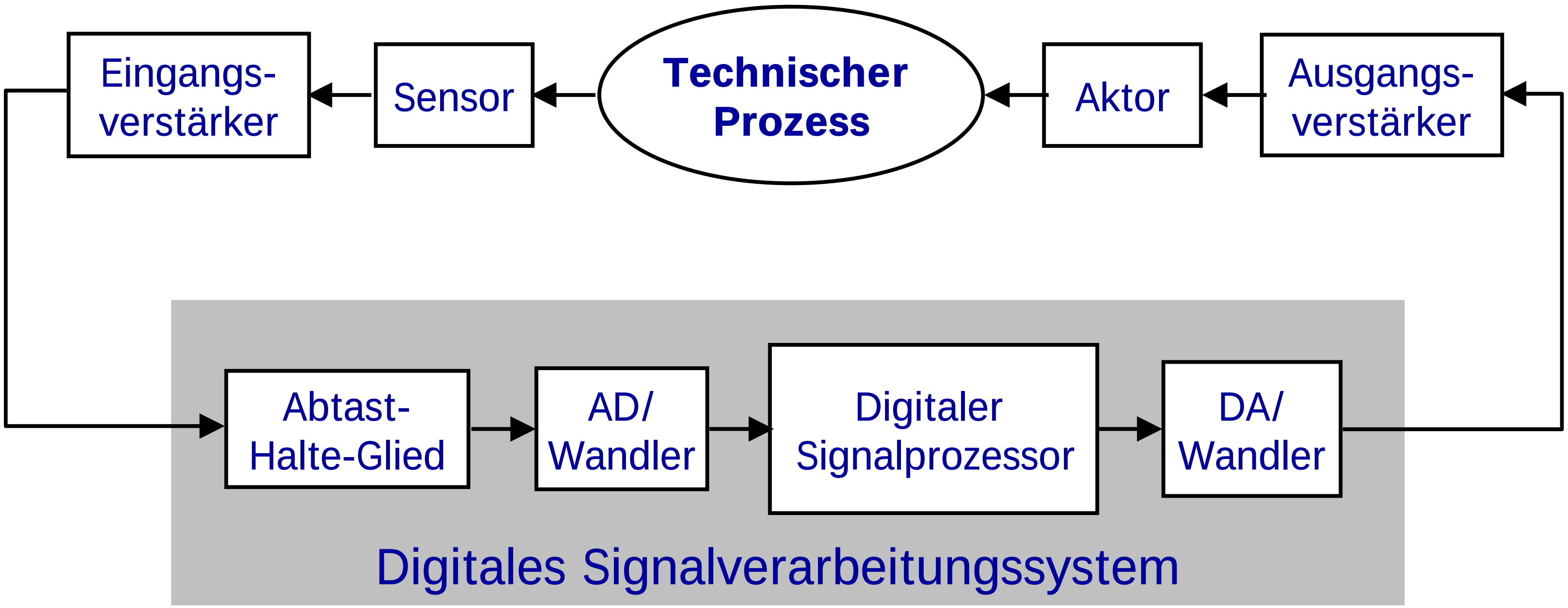
**Schaltnetze:**

- Rein kombinatorische logische Schaltungen
- Kein Speicherverhalten
- Realisierung logischer Funktionen

**Beispiel:** Licht-Aus Warnung im Kraftfahrzeug

„Motor aus“ und „Tür auf“ und „Licht an“ $\Longrightarrow$ Alarm

# Aufbau eines digitalen Signalverarbeitungssystems




- Informationserfassung mittels Sensoren
- Sensordaten „digitalisieren“
- Algorithmen der digitalen Signalverarbeitung
- Verarbeitetes Signal wieder in ein analoges Signal umwandeln

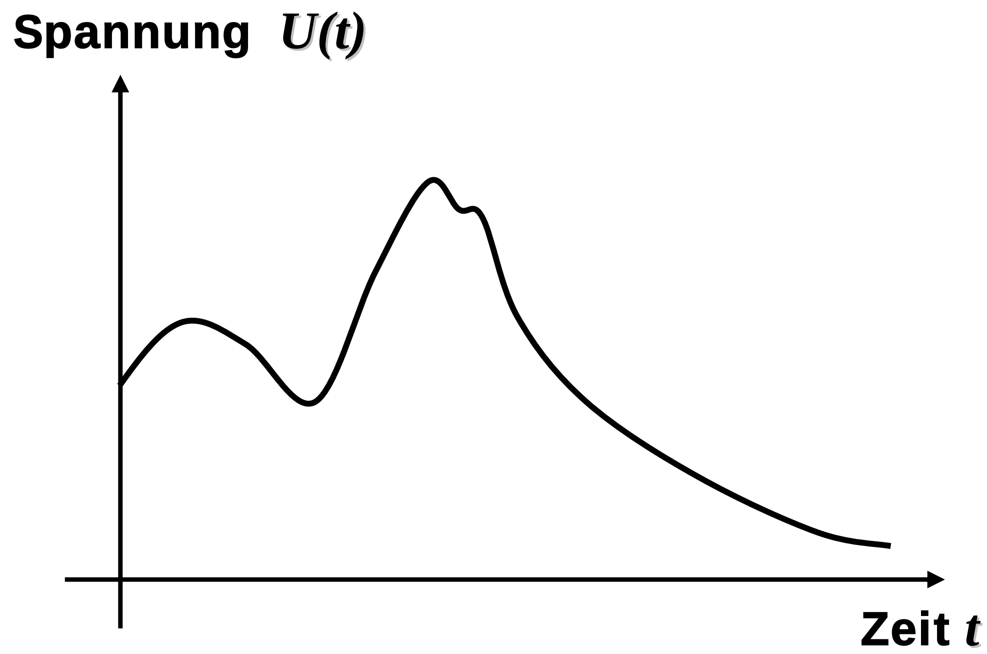
# Aufbau eines digitalen Signalverarbeitungssystems

- Eingangsverstärker zur Verstärkung des Sensorsignals und dessen Umsetzung in den erforderlichen Spannungsbereich
- Abtast-Halte-Glied zur periodischen Abtastung des Eingangssignals. Der abgetastete Wert wird innerhalb einer Abtastperiode konstant gehalten
- Eingangsverstärker mit *Anti-aliasing*-Filter zur Beseitigung von hohen Störfrequenzen des Sensorsignals
- Das Ausgangsverstärker sorgt für die Glättung des vom DA/Wandler kommende Signal (Rekonstruktionsfilter)

# Kontinuierliche und diskrete Signale (1)

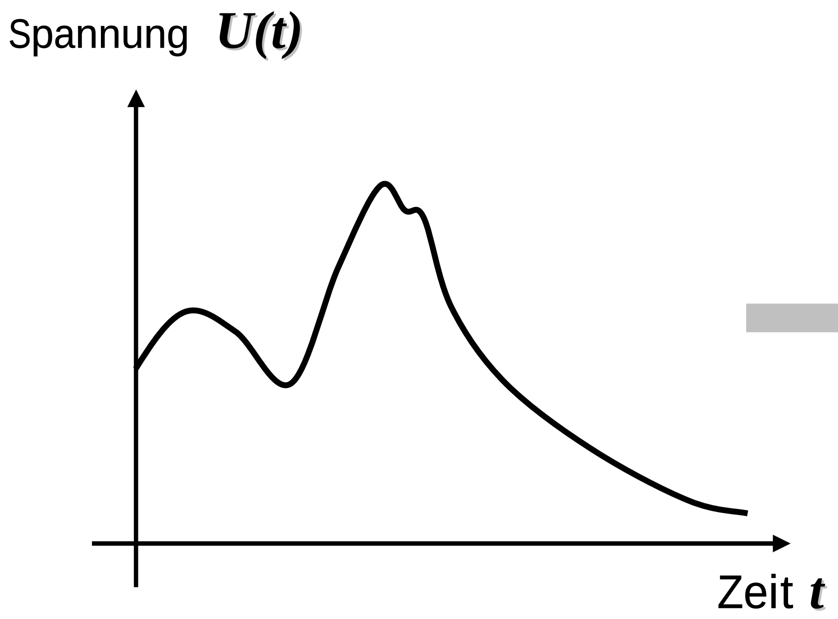
## Signal als physikalischer Träger einer Information

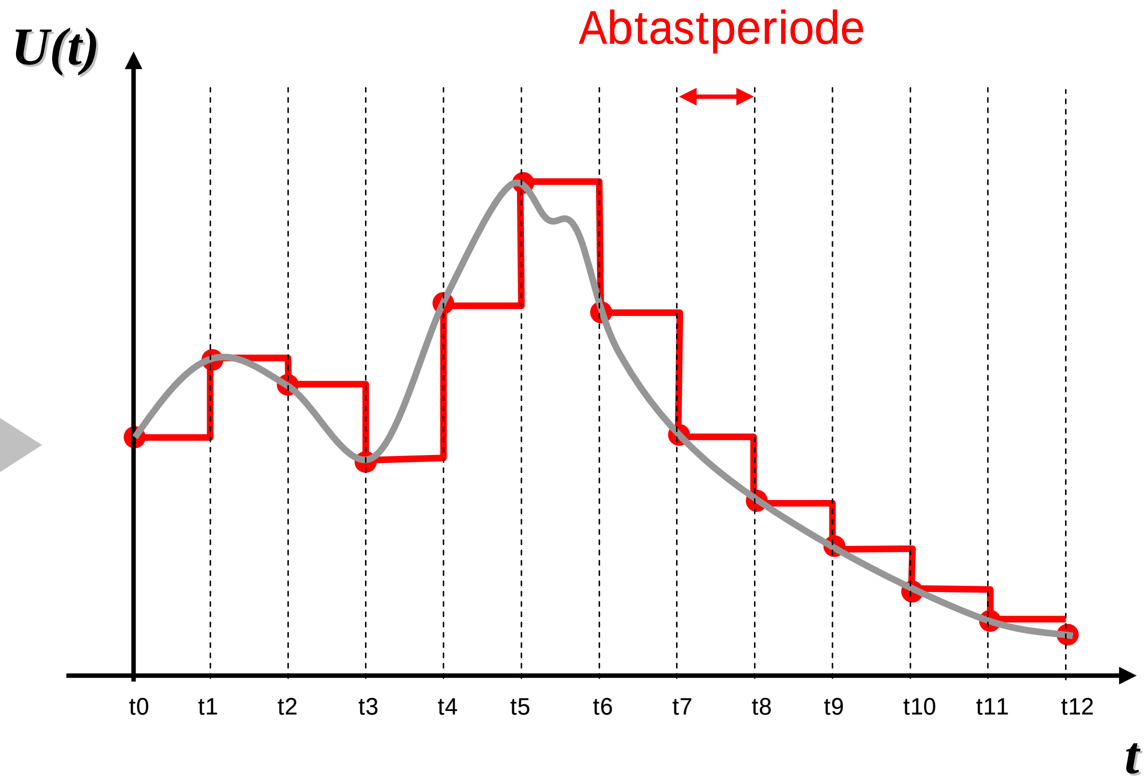
- Ein Signal ist eine Funktion einer unabhängigen Variable $t$, die gewöhnlich die Zeit repräsentiert. Das Signal wird als $U(t)$ angegeben.
- Analoges Signal: $U(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt definiert und kann jeden beliebigen Wert annehmen (Signal mit kontinuierlichen Werten).




**Analoges Signal**
**Zeit- und wertkontinuierlich**

# Kontinuierliche und diskrete Signale (2)



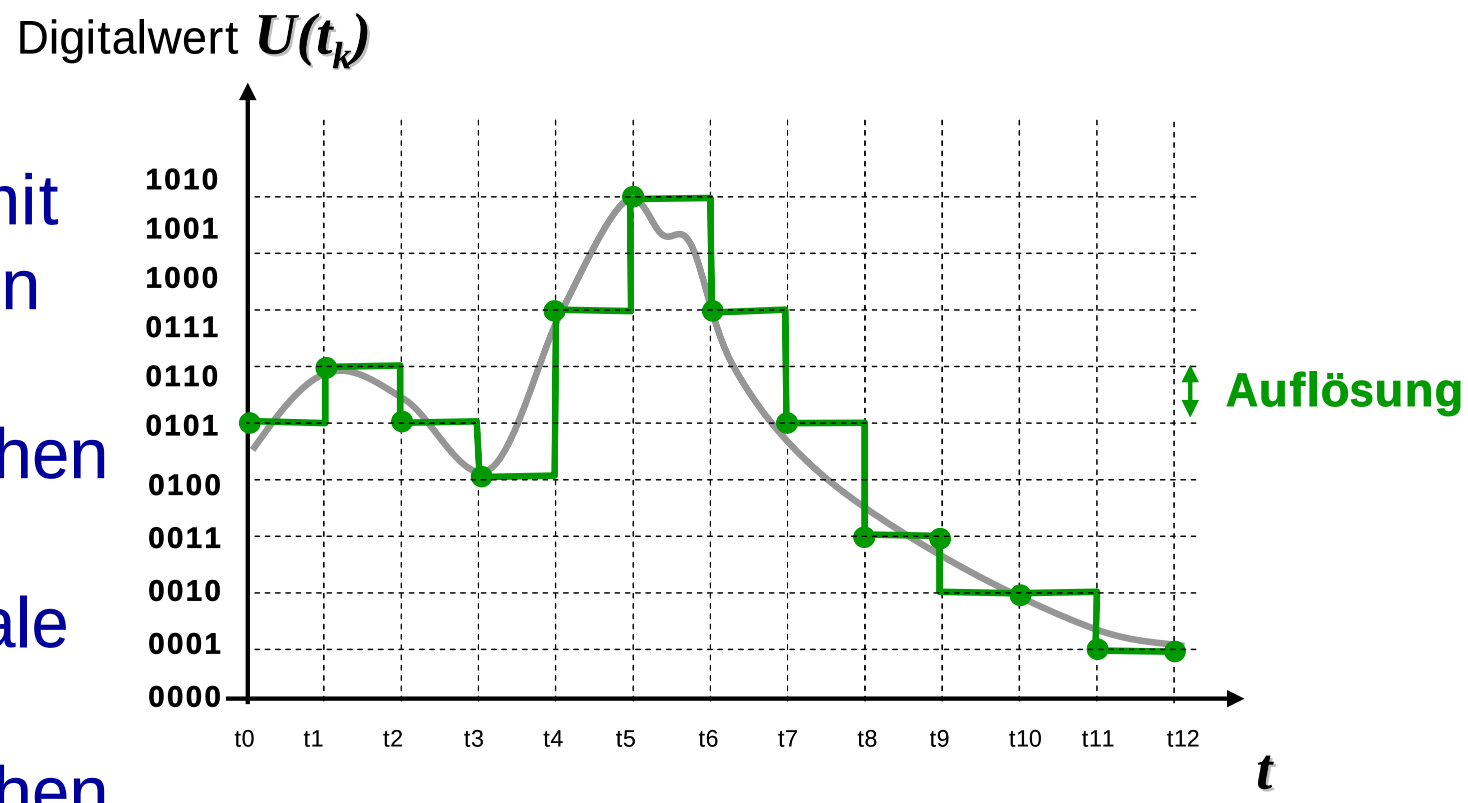




**Analoges Signal**
**Zeit- und wertkontinuierlich**

**Abtastung (zeitliche Quantisierung)**
**Zeitdiskret und wertkontinuierlich**

# Kontinuierliche und diskrete Signale (3)

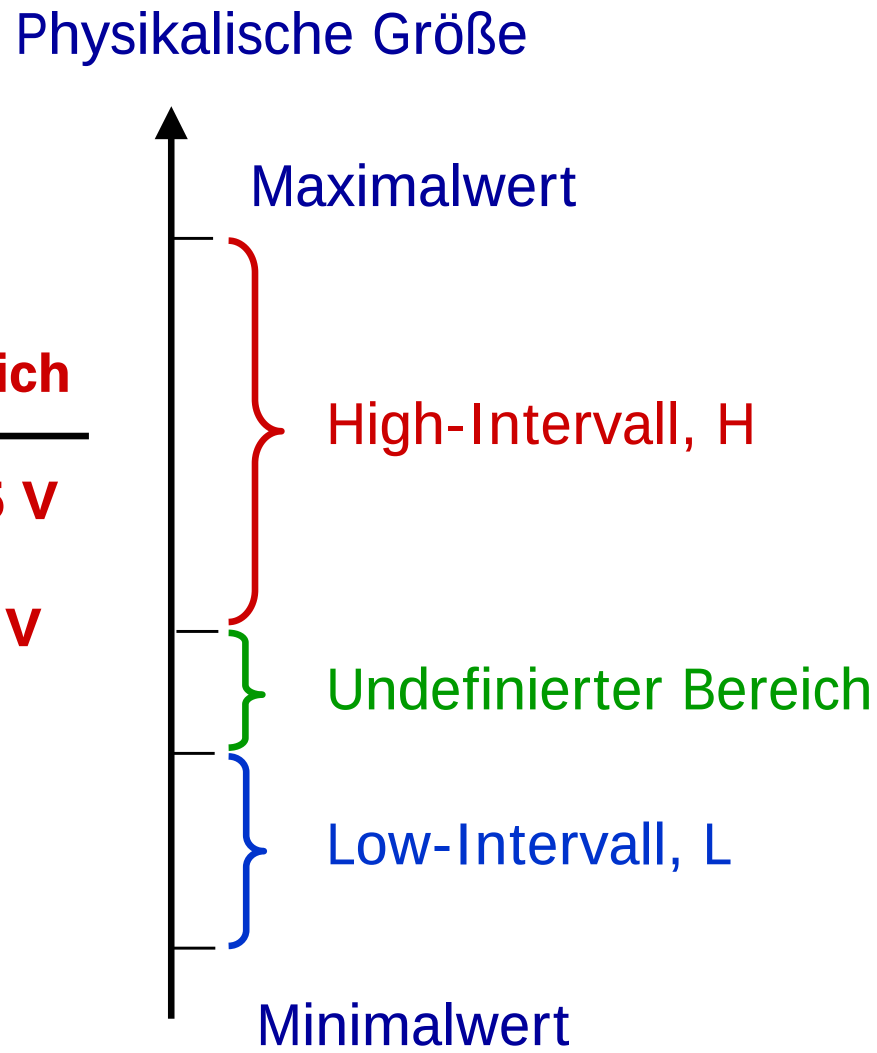
- Signal $U(t_k)$ mit einer endlichen Anzahl an unterschiedlichen Werten
- Wichtig: Signale mit zwei unterschiedlichen Werten




**Amplituden-Quantisierung**
**Zeit- und wertdiskret**

# Binäre Signale

| Technische Lösung | L-Bereich | H-Bereich |
|---|---|---|
| **TTL-Technik** | **0 ... 0,8 V** | **2,0 ... 5 V** |
| **V24-Schnittstelle** | **-12 ... -3 V** | **3 ... 12 V** |



# 3.1 Formale Grundlagen

Zur Untersuchung und Beschreibung der Eigenschaften und des Verhaltens von logischen Funktionen ist die **Boolesche Algebra** hervorragend geeignet.

Entwickelt wurde sie von dem Mathematiker **George Boole** (1815 –1864) als Algebra der Logik.

# George Boole 1815-1864

- Englischer Mathematiker und Logiker.
- Mit 16 Jahren Lehrer. Später eröffnete er eine eigene Schule
- Boole konnte jedoch nicht an einer Universität studieren, da er das Einkommen aus seiner Schule für seine Eltern benötigte.
- Im Jahre 1849 erhielt Boole einen Mathematik-Lehrstuhl am Queens-College in Cork (Irland). Dort lehrte er als außergewöhnlicher und hingebungsvoller Lehrer für den Rest seines Lebens
- 1854 publizierte Boole: *An investigation into the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*: Beschreibung der Logik auf neue Weise mit nur einer Algebra (**Algebra der Logik**), die so die Logik mit der Mathematik verband.

# 3.1.1 Boolesche Algebra

**Definition 2.1:**

Als eine Boolesche Algebra bezeichnet man eine Menge **V = {a,b,c,...}**, auf der zwei zweistellige Operationen $\oplus$ und $\otimes$ derart erklärt sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus **V** wieder Elemente aus **V** entstehen **(Abgeschlossenheit).**

| | |
|---|---|
| Verknüpfungsgebilde: | **BA = [ V, $\oplus$, $\otimes$ ]** |

Weiterhin müssen die vier **Huntingtonschen Axiome (H1-H4)** gelten:

# Huntingtonsche Axiome

**H0. Abgeschlossenheit:** Für alle $a, b \in V$ gilt:

$$a \otimes b \in V$$
$$a \oplus b \in V$$

**H1. Kommutativgesetze** $a \otimes b = b \otimes a$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

**H2. Distributivgesetze** $a \otimes ( b \oplus c ) = ( a \otimes b ) \oplus ( a \otimes c )$

$$a \oplus ( b \otimes c ) = ( a \oplus b ) \otimes ( a \oplus c )$$

**H3. Neutrale Elemente:** Es existieren zwei Elemente $\mathbf{e}, \mathbf{n} \in V$, so dass gilt:

$a \otimes \mathbf{e} = a$ (**e** wird <u>Einselement</u> genannt)

$a \oplus \mathbf{n} = a$ (**n** wird <u>Nullelement</u> genannt)

**H4. Inverse Elemente:** Für alle $a \in V$ existiert ein Element $\bar{a}$ ,so dass gilt:

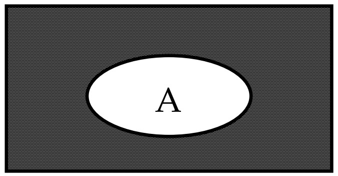
$$a \otimes \bar{a} = \mathbf{n}$$
$$a \oplus \bar{a} = \mathbf{e}$$

# Mengenalgebra (1)

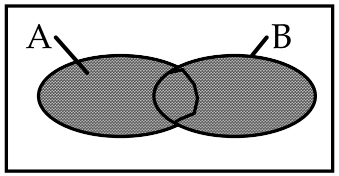
Die Zuordnung von Elementen der Mengenalgebra zu Symbolen der axiomatischen Definition einer Booleschen Algebra erfolgt nach folgender Korrespondenztabelle:

| **Boolesche Algebra** | **Mengenalgebra** | |
|---|---|---|
| V | $\wp(T)$ | Potenzmenge einer Grundmenge |
| $\oplus$ | $\cup$ | Vereinigung |
| $\otimes$ | $\cap$ | Durchschnitt |
| n | $\varnothing$ | Leere Menge |
| e | T | Grundmenge |
| $\bar{a}$ | $\bar{A}$ | Komplementmenge von A |

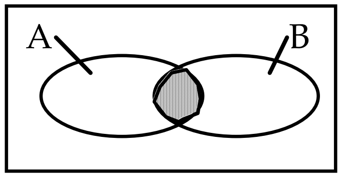
Veranschaulichung der Operatoren durch **Venn-Diagramme**:




$\bar{A}$




$A \cup B$




$A \cap B$

# Mengenalgebra (2)

Verknüpfungsgebilde: **$MA = [\ P(M), \cap, \cup\ ]$**

$\forall\ S, T, R \in P(M)$ gilt:

**H0**: $P(M)$ ist **abgeschlossen** bzgl. $\cap$ und $\cup$

$S \cap T \in P(M)$ $\qquad$ $S \cup T \in P(M)$

**H1: Kommutativgesetz:**

$S \cap T = T \cap S$ $\qquad$ $S \cup T = T \cup S$

# Mengenalgebra (3)

## H2: Distributivgesetz:

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$$
$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$$

## H3: Neutrale Elemente:

$S \cap M = S$ $\qquad$ $S \cup \emptyset = S$

## H4: Inverse Elemente:

$S \cap \overline{S} = \emptyset$ $\qquad$ $S \cup \overline{S} = M$

# Beispiel: Mengenalgebra

Grundmenge: $\mathbf{T = \{x,y,z\}}$

$\Rightarrow$ Potenzmenge: $\wp\mathbf{(T)=\{\emptyset,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},T\}}$

Operatoren: mit z. B. $\mathbf{A=\{x,y\}}$ und $\mathbf{B=\{x,z\}}$ ergibt sich:

$$\mathbf{A \cup B=\{x,y,z\}} \qquad \mathbf{A\cap B=\{x\}}$$

Wegen $\mathbf{A\cup B}\in \wp\mathbf{(T)}$ und $\mathbf{A\cap B} \in \wp\mathbf{(T)}$ für alle $\mathbf{A,B} \in \wp\mathbf{(T)}$ ist die Abgeschlossenheit (H0) erfüllt.

# Mengenalgebra und Boolesche Algebra

## Mengenalgebra (MA)

$P(M)$

$S \in P(M)$ oder $S \subseteq M$

$\overline{S}$

Operatoren: $\cap, \cup$

Bezugsmenge: $\mathbf{M} \in P(M)$

Leere Menge: $\varnothing \in P(M)$

## Boolesche Algebra (BA)

$V$

$a \in V$

$\overline{a}$

Operatoren: $\oplus, \otimes$

Einselement: $e \in V$

Nullelement: $n \in V$

**MA** $\xleftarrow{\text{Interpretation}}$ **BA**

**MA** $\xrightarrow{\text{Abstraktion}}$ **BA**

# 3.1.2 Schaltalgebra

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

| Boolesche Algebra | Schaltalgebra |
|---|---|
| $V$ | $\{0,1\}$ |
| $\oplus$ | $\vee$ ← **Disjunktion** |
| $\otimes$ | $\wedge$ ← **Konjunktion** |
| $\mathbf{n}$ | $0$ |
| $\mathbf{e}$ | $1$ |
| $\bar{a}$ | $\bar{a}$ |

Schreibweise: $a + b$ für $a \vee b$

$a \,\&\, b$ für $a \wedge b$

# Schaltalgebra (2)

**Schaltalgebra:** $\mathbf{SA = [\{0,1\}, \wedge , \vee]}$

Konjunktion Disjunktion

Die Verknüpfungen können leicht in Funktionstabellen dargestellt werden:

| $a$ | $b$ | $a \wedge b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $a$ | $b$ | $a \vee b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $a$ | $\bar{a}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# Schaltalgebra (3)

**Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:**

**H0:** **Abgeschlossenheit**

**H1:**
$$a \vee b = b \vee a$$
$$a \wedge b = b \wedge a$$

**H2:**
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

**H3:**
$$a \vee 0 = a$$
$$a \wedge 1 = a$$

**H4:**
$$a \wedge \overline{a} = 0$$
$$a \vee \overline{a} = 1$$

# Schaltalgebra (4)

Aus den vier Huntingtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten:

**Assoziativgesetze:**

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

**Idempotenzgesetze:**

$$a \wedge a = a$$
$$a \vee a = a$$

**Absorptionsgesetze:**

$$a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

**DeMorgan-Gesetze:**

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$
$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

# Beweis: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

Zu zeigen: $(\bar{a} \vee \bar{b})$ das Komplementelement von $(a \wedge b)$

Zu zeigen: Komplementgesetze $(x \vee \bar{x} = 1)$ und $(x \wedge \bar{x} = 0)$ ✓
sind erfüllt

$x = a \wedge b$

$$(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$$

$$= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$$