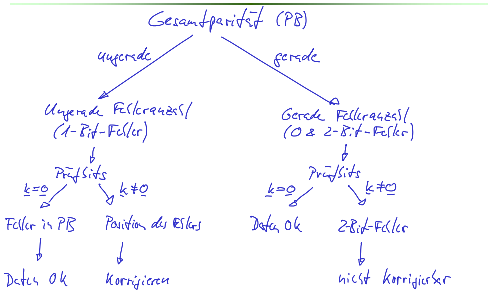
Wdh. Hammingkode : 2-Bitfehler (2)

- Um 1-Bitfehler von 2-Bitfehlern unterscheiden zu können, fügt man dem Hammingkode ein weiteres Paritätsbit hinzu

1-Bitfehler:
- Erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar und korrigierbar durch den Hammingkode

2-Bitfehler:
- Nicht erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar durch den Hammingkode, **aber** nicht korrigierbar, da die fehlerhaften Positionen nicht ermittelt werden können

n-Bitfehler (n>2): andere Verfahren



Wdh. Beispiel 2-Bitfehler (1)

- Fall 1: Kein Fehler

$m_5\ k_4\ m_4\ m_3\ m_2\ k_3\ m_1\ k_2\ k_1$ PB

0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 $\qquad k_4k_3k_2k_1 = 0000$

- Fall 2: 1-Bit-Fehler (Fehler im Hamming-Codewort)

0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 $\qquad k_4k_3k_2k_1 = 0110$
Fehler an 6. Position

- Fall 3: 1-Bit-Fehler (Fehler im Paritätsbit)

0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 $\qquad k_4k_3k_2k_1 = 0000$
Fehler im Paritätsbit

Wdh. Beispiel 2-Bitfehler (2)

- Fall 4: 2-Bit-Fehler (2 Fehler im Hamming-Codewort)

0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 $\qquad k_4k_3k_2k_1 = 0101$
2-Bit-Fehler

- Fall 5: 2-Bit-Fehler (1 Fehler im Hamming-Codewort, Fehler im Paritätsbit)

0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 $\qquad k_4k_3k_2k_1 = 0110$
2-Bit-Fehler

Hammingkode: Zusammenfassung

- An Standard-Codewörter lässt sich ein weiteres Quersummenbit anfügen, so dass Zweibitfehler im Codewort erkennbar werden.
- 32-Bit Wortlänge werden durch 7 Prüfbits zur Einzelfehlerkorrektur und Doppelfehlererkennung ergänzt.
- 64 Bit lange Datenwörter erfordern 8 Korrekturbits.
- Die Algebra endlicher Körper bietet über Generator- und Nullmatrix Verfahren, die zu jedem Datenwort ein Codewort erzeugen.

$m_4 \quad m_3 \quad m_2 \quad \boxed{k_3} \quad m_1 \quad \boxed{k_2} \quad \boxed{k_1}$

$$\begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ k_3 \\ m_1 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ m_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ k_3 \\ m_1 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

Generatormatrix G $\qquad$ Nullmatrix H

Beispiel:

- Datenwort $\underline{DW} = \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, Codewort $\underline{CW} = \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ k_3 \\ m_1 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cancel{0}\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = H \cdot \underline{CW} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Fehlerhaftes Codewort $\underline{\overline{CW}} = \underline{CW} + \underline{e}_i$, $\underline{e}_i$ ... i-ter Einheitsvektor
- $H \cdot \underline{\overline{CW}} = H(\underline{CW} + \underline{e}_i) = \underbrace{H \cdot \underline{CW}}_{\underline{0}} + H \cdot \underline{e}_i = \underbrace{H(:,i)}_{\text{i-te Spalte von } H}$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Fehler in 3. Pos.}$$

$$= H \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \underbrace{H \cdot \underline{CW}}_{\underline{0}} + H \cdot \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vorlesungsgliederung

- **Kapitel 1: Einführung**
- **Kapitel 2: Zahlen- und Zeichendarstellung**
- **Kapitel 3: Schaltnetze**
- **Kapitel 4: Schaltwerke**
- **Kapitel 5: Rechnerarithmetik**

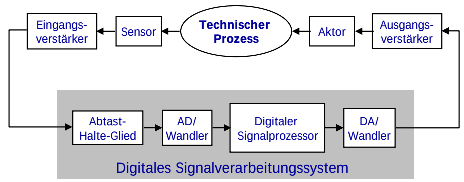
3. Schaltnetze

Schaltnetze:
- Rein kombinatorische logische Schaltungen
- Kein Speicherverhalten
- Realisierung logischer Funktionen

Beispiel: Licht-Aus Warnung im Kraftfahrzeug

„Motor aus" und „Tür auf" und „Licht an" ⟹ Alarm

Aufbau eines digitalen Signalverarbeitungssystems



- Informationserfassung mittels Sensoren
- Sensordaten „digitalisieren"
- Algorithmen der digitalen Signalverarbeitung
- Verarbeitetes Signal wieder in ein analoges Signal umwandeln

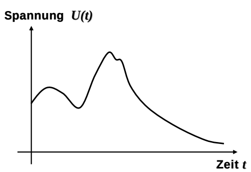
Aufbau eines digitalen Signalverarbeitungssystems

- Eingangsverstärker zur Verstärkung des Sensorsignals und dessen Umsetzung in den erforderlichen Spannungsbereich
- Abtast-Halte-Glied zur periodischen Abtastung des Eingangssignals. Der abgetastete Wert wird innerhalb einer Abtastperiode konstant gehalten
- Eingangsverstärker mit *Anti-aliasing*-Filter zur Beseitigung von hohen Störfrequenzen des Sensorsignals
- Das Ausgangsverstärker sorgt für die Glättung des vom DA/Wandler kommende Signal (Rekonstruktionsfilter)

Kontinuierliche und diskrete Signale (1)

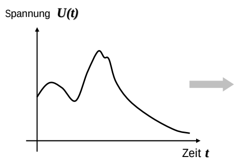
Signal als physikalischer Träger einer Information

- Ein Signal ist eine Funktion einer unabhängigen Variable ***t***, die gewöhnlich die Zeit repräsentiert. Das Signal wird als ***U(t)*** angegeben.
- Analoges Signal: ***U(t)*** ist zu jedem Zeitpunkt definiert und kann jeden beliebigen Wert annehmen (Signal mit kontinuierlichen Werten).

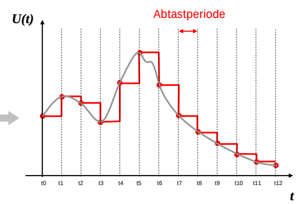


Analoges Signal
Zeit- und wertkontinuierlich

Kontinuierliche und diskrete Signale (2)



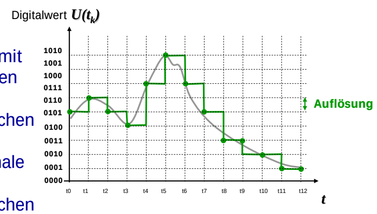
Analoges Signal
Zeit- und wertkontinuierlich



Abtastung (zeitliche Quantisierung)
Zeitdiskret und wertkontinuierlich

Kontinuierliche und diskrete Signale (3)

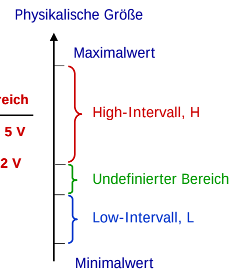
- Signal $U(t_k)$ mit einer endlichen Anzahl an unterschiedlichen Werten
- Wichtig: Signale mit zwei unterschiedlichen Werten



Amplituden-Quantisierung
Zeit- und wertdiskret

Binäre Signale

Technische Lösung	L-Bereich	H-Bereich
TTL-Technik	0 ... 0,8 V	2,0 ... 5 V
V24-Schnittstelle	-12 ... -3 V	3 ... 12 V

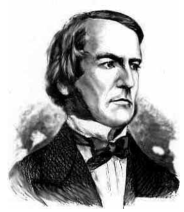


3.1 Formale Grundlagen

Zur Untersuchung und Beschreibung der Eigenschaften und des Verhaltens von logischen Funktionen ist die **Boolesche Algebra** hervorragend geeignet.

Entwickelt wurde sie von dem Mathematiker **George Boole** (1815 –1864) als Algebra der Logik.

George Boole 1815-1864



- Englischer Mathematiker und Logiker.
- Mit 16 Jahren Lehrer. Später eröffnete er eine eigene Schule
- Boole konnte jedoch nicht an einer Universität studieren, da er das Einkommen aus seiner Schule für seine Eltern benötigte.
- Im Jahre 1849 erhielt Boole einen Mathematik-Lehrstuhl am Queens-College in Cork (Irland). Dort lehrte er als außergewöhnlicher und hingebungsvoller Lehrer für den Rest seines Lebens
- 1854 publizierte Boole: *An investigation into the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*: Beschreibung der Logik auf neue Weise mit nur einer Algebra (**Algebra der Logik**), die so die Logik mit der Mathematik verband.

3.1.1 Boolesche Algebra

Definition 2.1:

Als eine Boolesche Algebra bezeichnet man eine Menge $\mathbf{V = \{a,b,c,...\}}$, auf der zwei zweistellige Operationen $\oplus$ und $\otimes$ derart erklärt sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus $\mathbf{V}$ wieder Elemente aus $\mathbf{V}$ entstehen **(Abgeschlossenheit).**

Verknüpfungsgebilde: $\mathbf{BA = [\, V, \oplus, \otimes \,]}$

Weiterhin müssen die vier **Huntingtonschen Axiome (H1-H4)** gelten:

Huntingtonsche Axiome

H0. Abgeschlossenheit: Für alle $a, b \in V$ gilt:

$a \otimes b \in V$
$a \oplus b \in V$

H1. Kommutativgesetze $a \otimes b = b \otimes a$
$a \oplus b = b \oplus a$

H2. Distributivgesetze $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$

H3. Neutrale Elemente: Es existieren zwei Elemente $\mathbf{e}, \mathbf{n} \in V$, so dass gilt:

$a \otimes \mathbf{e} = a$ (**e** wird Einselement genannt)
$a \oplus \mathbf{n} = a$ (**n** wird Nullelement genannt)

H4. Inverse Elemente: Für alle $a \in V$ existiert ein Element $\bar{a}$,so dass gilt:

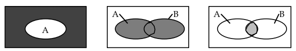
$a \otimes \bar{a} = \mathbf{n}$
$a \oplus \bar{a} = \mathbf{e}$

Mengenalgebra (1)

Die Zuordnung von Elementen der Mengenalgebra zu Symbolen der axiomatischen Definition einer Booleschen Algebra erfolgt nach folgender Korrespondenztabelle:

Boolesche Algebra	**Mengenalgebra**	
V	$\wp$(T)	Potenzmenge einer Grundmenge
$\oplus$	$\cup$	Vereinigung
$\otimes$	$\cap$	Durchschnitt
n	$\varnothing$	Leere Menge
e	T	Grundmenge
$\bar{a}$	$\bar{A}$	Komplementmenge von A

Veranschaulichung der Operatoren durch **Venn-Diagramme**:



$\bar{A}$ $A \cup B$ $A \cap B$

Mengenalgebra (2)

Verknüpfungsgebilde: $\mathbf{MA = [\, P(M), \cap, \cup \,]}$

$\forall$ S, T, R $\in$ P(M) gilt:

H0: P(M) ist **abgeschlossen** bzgl. $\cap$ und $\cup$

$S \cap T \in P(M)$ $S \cup T \in P(M)$

H1: Kommutativgesetz:

$S \cap T = T \cap S$ $S \cup T = T \cup S$

Mengenalgebra (3)

H2: Distributivgesetz:

$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$
$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$

H3: Neutrale Elemente:

$S \cap M = S$ $S \cup \varnothing = S$

H4: Inverse Elemente:

$S \cap \bar{S} = \varnothing$ $S \cup \bar{S} = M$

Beispiel: Mengenalgebra

Grundmenge: $\mathbf{T = \{x,y,z\}}$

$\Rightarrow$ Potenzmenge: $\wp\mathbf{(T)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},T\}}$

Operatoren: mit z. B. $\mathbf{A=\{x,y\}}$ und $\mathbf{B=\{x,z\}}$ ergibt sich:

$\mathbf{A \cup B=\{x,y,z\}}$ $\mathbf{A \cap B=\{x\}}$

Wegen $\mathbf{A \cup B \in \wp(T)}$ und $\mathbf{A \cap B \in \wp(T)}$ für alle $\mathbf{A,B \in \wp(T)}$ ist die Abgeschlossenheit (H0) erfüllt.

Mengenalgebra und Boolesche Algebra

Mengenalgebra (MA)	**Boolesche Algebra (BA)**
P(M)	V
$S \in P(M)$ oder $S \subseteq M$	$a \in V$
$\bar{S}$	$\bar{a}$
Operatoren: $\cap, \cup$	Operatoren: $\oplus, \otimes$
Bezugsmenge: $\mathbf{M} \in P(M)$	Einselement: $e \in V$
Leere Menge: $\varnothing \in P(M)$	Nullelement: $n \in V$

MA $\xleftarrow{\textbf{Interpretation}}$ **BA**

MA $\xrightarrow{\textbf{Abstraktion}}$ **BA**

3.1.2 Schaltalgebra

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

Boolesche Algebra	**Schaltalgebra**	
V	{0,1}	
$\oplus$	$\vee$	**Disjunktion**
$\otimes$	$\wedge$	**Konjunktion**
n	0	
e	1	
$\bar{a}$	$\bar{a}$	

Schreibweise: a + b für $a \vee b$
a & b für $a \wedge b$

Schaltalgebra (2)

Schaltalgebra: $\mathbf{SA = [\, \{0,1\}, \wedge, \vee]}$

Konjunktion Disjunktion

Die Verknüpfungen können leicht in Funktionstabellen dargestellt werden:

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

Schaltalgebra (3)

Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:

H0: **Abgeschlossenheit**

H1: $a \vee b = b \vee a$
$a \wedge b = b \wedge a$

H2: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

H3: $a \vee 0 = a$
$a \wedge 1 = a$

H4: $a \wedge \bar{a} = 0$
$a \vee \bar{a} = 1$

Schaltalgebra (4)

Aus den vier Huntingtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten:

Assoziativgesetze: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Idempotenzgesetze: $a \wedge a = a$
$a \vee a = a$

Absorptionsgesetze: $a \wedge (a \vee b) = a$
$a \vee (a \wedge b) = a$

DeMorgan-Gesetze: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$
$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

Beweis: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

Zu zeigen: $(\bar{a} \vee \bar{b})$ das Komplementelement von $(a \wedge b)$

Zu zeigen: Komplementgesetze $(x \vee \bar{x} = 1)$ und $(x \wedge \bar{x} = 0)$ sind erfüllt

$x = a \wedge b$ ✓

$(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$
$= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$