

Wdh. Hammingkode : 2-Bitfehler (2)

- Um 1-Bitfehler von 2-Bitfehlern unterscheiden zu können, fügt man dem Hammingkode ein weiteres Paritätsbit hinzu

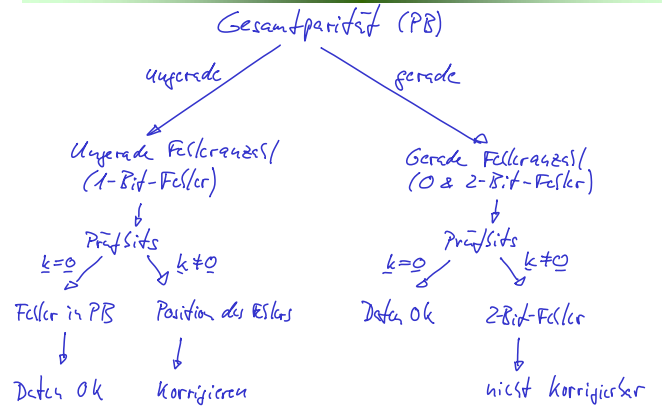
1-Bitfehler:

- Erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar und korrigierbar durch den Hammingkode

2-Bitfehler:

- Nicht erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar durch den Hammingkode, **aber** nicht korrigierbar, da die fehlerhaften Positionen nicht ermittelt werden können

n-Bitfehler (n>2): andere Verfahren



Wdh. Beispiel 2-Bitfehler (1)

Fall 1: Kein Fehler

$$m_5 \ m_4 \ m_3 \ m_2 \ m_1 \ k_2 \ k_1 \ PB$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \quad k_4 k_3 k_2 k_1 = 0000$$

Fall 2: 1-Bit-Fehler (Fehler im Hamming-Codewort)

$$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \quad k_4 k_3 k_2 k_1 = 0110$$

Fehler an 6. Position

Fall 3: 1-Bit-Fehler (Fehler im Paritätsbit)

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \quad k_4 k_3 k_2 k_1 = 0000$$

Fehler im Paritätsbit

Wdh. Beispiel 2-Bitfehler (2)

Fall 4: 2-Bit-Fehler (2 Fehler im Hamming-Codewort)

$$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \quad k_4 k_3 k_2 k_1 = 0101$$

2-Bit-Fehler

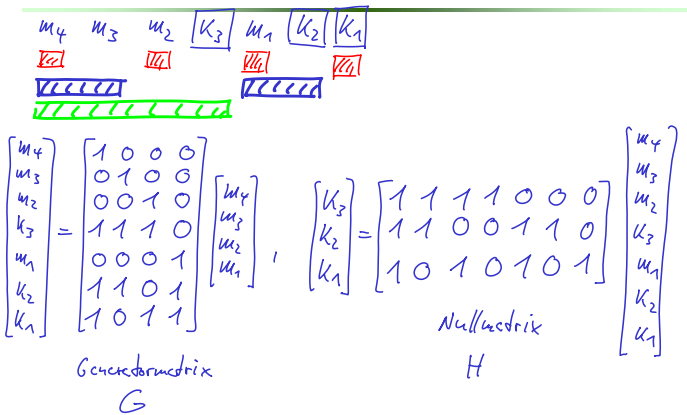
Fall 5: 2-Bit-Fehler (1 Fehler im Hamming-Codewort, Fehler im Paritätsbit)

$$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \quad k_4 k_3 k_2 k_1 = 0110$$

2-Bit-Fehler

Hammingkode: Zusammenfassung

- An Standard-Codewörter lässt sich ein weiteres Quersummenbit anfügen, so dass Zweibitfehler im Codewort erkennbar werden.
- 32-Bit Wortlänge werden durch 7 Prüfbits zur Einzelfehlerkorrektur und Doppelfehlererkennung ergänzt.
- 64 Bit lange Datenwörter erfordern 8 Korrekturbits.
- Die Algebra endlicher Körper bietet über Generator- und Nullmatrix Verfahren, die zu jedem Datenwort ein Codewort erzeugen.



Beispiel:

Datenwort $\underline{D} = \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, Codewort $\underline{C} = \begin{bmatrix} m_4 \\ m_3 \\ m_2 \\ m_1 \\ k_3 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = H \cdot \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fehlerhaftes Codewort $\underline{C}' = \underline{C} + \underline{e}_i$, \underline{e}_i ... i-tes Einheitsvektor

$H \cdot \underline{C}' = H(\underline{C} + \underline{e}_i) = H \cdot \underline{C} + H \cdot \underline{e}_i = \underline{0} + H(\cdot, i)$

\downarrow
i-te Spalte von H

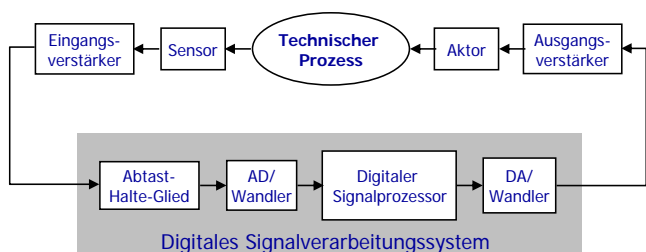
Beispiel:

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Fehler in 3. Pos.}$$

$$= H \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = H \cdot \underline{C} + H \cdot \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Kapitel 1: Einführung
- Kapitel 2: Zahlen- und Zeichendarstellung
- Kapitel 3: Schaltnetze
- Kapitel 4: Schaltwerke
- Kapitel 5: Rechnerarithmetik

Aufbau eines digitalen Signalverarbeitungssystems

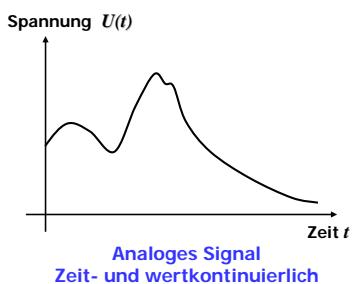


- Informationserfassung mittels Sensoren
- Sensordaten „digitalisieren“
- Algorithmen der digitalen Signalverarbeitung
- Verarbeitetes Signal wieder in ein analoges Signal umwandeln

Kontinuierliche und diskrete Signale (1)

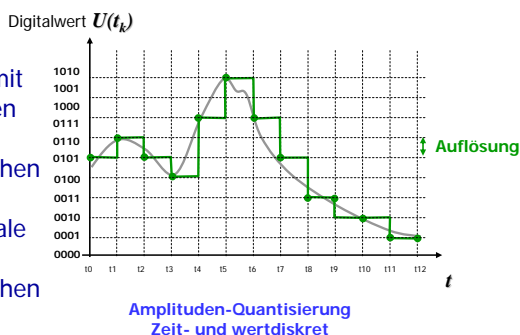
Signal als physikalischer Träger einer Information

- Ein Signal ist eine Funktion einer unabhängigen Variable t , die gewöhnlich die Zeit repräsentiert. Das Signal wird als $U(t)$ angegeben.
- Analoges Signal: $U(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt definiert und kann jeden beliebigen Wert annehmen (Signal mit kontinuierlichen Werten).



Kontinuierliche und diskrete Signale (3)

- Signal $U(t_k)$ mit einer endlichen Anzahl an unterschiedlichen Werten
- Wichtig: Signale mit zwei unterschiedlichen Werten



Schaltnetze:

- Rein kombinatorische logische Schaltungen
- Kein Speicherverhalten
- Realisierung logischer Funktionen

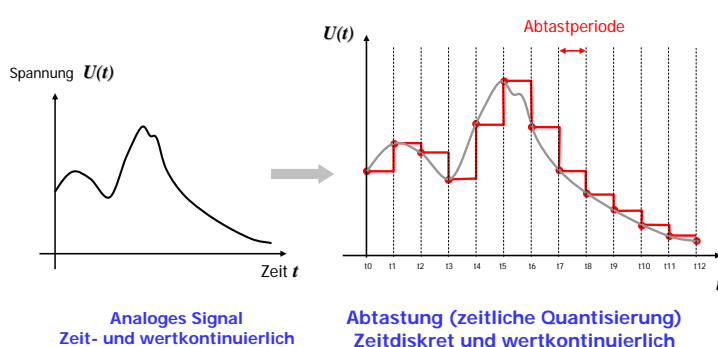
Beispiel: Licht-Aus Warnung im Kraftfahrzeug

„Motor aus“ und „Tür auf“ und „Licht an“ \Rightarrow Alarm

Aufbau eines digitalen Signalverarbeitungssystems

- Eingangsverstärker zur Verstärkung des Sensorsignals und dessen Umsetzung in den erforderlichen Spannungsbereich
- Abtast-Halte-Glied zur periodischen Abtastung des Eingangssignals. Der abgetastete Wert wird innerhalb einer Abtastperiode konstant gehalten
- Eingangsverstärker mit *Anti-aliasing*-Filter zur Beseitigung von hohen Störfrequenzen des Sensorsignals
- Das Ausgangsverstärker sorgt für die Glättung des vom DA/Wandler kommende Signal (Rekonstruktionsfilter)

Kontinuierliche und diskrete Signale (2)



Binäre Signale

Technische Lösung	L-Bereich	H-Bereich	Physikalische Größe
TTL-Technik	0 ... 0,8 V	2,0 ... 5 V	High-Intervall, H
V24-Schnittstelle	-12 ... -3 V	3 ... 12 V	
			Undefinierter Bereich
			Low-Intervall, L
			Maximalwert
			Minimalwert

3.1 Formale Grundlagen

Zur Untersuchung und Beschreibung der Eigenschaften und des Verhaltens von logischen Funktionen ist die **Boolesche Algebra** hervorragend geeignet.

Entwickelt wurde sie von dem Mathematiker **George Boole** (1815 –1864) als Algebra der Logik.

3.1.1 Boolesche Algebra

Definition 2.1:

Als eine Boolesche Algebra bezeichnet man eine Menge $V = \{a, b, c, \dots\}$, auf der zwei zweistellige Operationen \oplus und \otimes derart erklärt sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus V wieder Elemente aus V entstehen (**Abgeschlossenheit**).

Verknüpfungsgebilde: $BA = [V, \oplus, \otimes]$

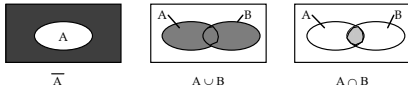
Weiterhin müssen die vier **Huntingtonschen Axiome (H1-H4)** gelten:

Mengenalgebra (1)

Die Zuordnung von Elementen der Mengenalgebra zu Symbolen der axiomatischen Definition einer Booleschen Algebra erfolgt nach folgender Korrespondenztabelle:

Boolesche Algebra	Mengenalgebra	
V	$\wp(T)$	Potenzmenge einer Grundmenge
\oplus	\cup	Vereinigung
\otimes	\cap	Durchschnitt
n	\emptyset	Leere Menge
e	T	Grundmenge
\bar{a}	\bar{A}	Komplementmenge von A

Veranschaulichung der Operatoren durch **Venn-Diagramme**:



Mengenalgebra (3)

H2: Distributivgesetz:

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$$

$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$$

H3: Neutrale Elemente:

$$S \cap M = S \quad S \cup \emptyset = S$$

H4: Inverse Elemente:

$$S \cap \bar{S} = \emptyset \quad S \cup \bar{S} = M$$

George Boole 1815-1864

- Englischer **Mathematiker** und **Logiker**.
- Mit 16 Jahren Lehrer. Später eröffnete er eine eigene Schule
- Boole konnte jedoch nicht an einer Universität studieren, da er das Einkommen aus seiner Schule für seine Eltern benötigte.
- Im Jahre 1849 erhielt Boole einen Mathematik-Lehrstuhl am Queens-College in Cork (Irland). Dort lehrte er als außergewöhnlicher und hingebungsvoller Lehrer für den Rest seines Lebens
- 1854 publizierte Boole: *An investigation into the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*: Beschreibung der Logik auf neue Weise mit nur einer Algebra (**Algebra der Logik**), die so die Logik mit der Mathematik verband.



Huntingtonsche Axiome

H0. Abgeschlossenheit: Für alle $a, b \in V$ gilt:

$$a \otimes b \in V$$

$$a \oplus b \in V$$

H1. Kommutativgesetz $a \otimes b = b \otimes a$
 $a \oplus b = b \oplus a$

H2. Distributivgesetze $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
 $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$

H3. Neutrale Elemente: Es existieren zwei Elemente $e, n \in V$, so dass gilt:

$$a \otimes e = a \quad (e \text{ wird Inselement genannt})$$

$$a \oplus n = a \quad (n \text{ wird Nullelement genannt})$$

H4. Inverse Elemente: Für alle $a \in V$ existiert ein Element \bar{a} , so dass gilt:

$$a \otimes \bar{a} = n$$

$$a \oplus \bar{a} = e$$

Mengenalgebra (2)

Verknüpfungsgebilde: $MA = [P(M), \cap, \cup]$

$\forall S, T, R \in P(M)$ gilt:

H0: $P(M)$ ist **abgeschlossen** bzgl. \cap und \cup

$$S \cap T \in P(M) \quad S \cup T \in P(M)$$

H1: Kommutativgesetz:

$$S \cap T = T \cap S \quad S \cup T = T \cup S$$

Beispiel: Mengenalgebra

Grundmenge: $T = \{x, y, z\}$

\Rightarrow Potenzmenge: $\wp(T) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, T\}$

Operatoren: mit z. B. $A = \{x, y\}$ und $B = \{x, z\}$ ergibt sich:

$$A \cup B = \{x, y, z\} \quad A \cap B = \{x\}$$

Wegen $A \cup B \in \wp(T)$ und $A \cap B \in \wp(T)$ für alle $A, B \in \wp(T)$ ist die Abgeschlossenheit (H0) erfüllt.

Mengenalgebra (MA)

$P(M)$

$S \in P(M)$ oder $S \subseteq M$

\bar{S}

Operatoren: \cap, \cup

Bezugsmenge: $M \in P(M)$

Leere Menge: $\emptyset \in P(M)$

Boolesche Algebra (BA)

V

$a \in V$

\bar{a}

Operatoren: \oplus, \otimes

Einselement: $e \in V$

Nullelement: $n \in V$



Schaltalgebra (2)

Schaltalgebra: $SA = [\{0,1\}, \wedge, \vee]$
 ↓ Konjunktion ↓ Disjunktion

Die Verknüpfungen können leicht in Funktionstabellen dargestellt werden:

a	b	$a \wedge b$	a	b	$a \vee b$	a	\bar{a}
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

Schaltalgebra (4)

Aus den vier Huntington'schen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten:

Assoziativgesetz: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Idempotenzgesetz: $a \wedge a = a$
 $a \vee a = a$

Absorptionsgesetz: $a \wedge (a \vee b) = a$
 $a \vee (a \wedge b) = a$

DeMorgan-Gesetze: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$
 $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

Boolesche Algebra	Schaltalgebra
V	$\{0,1\}$
\oplus	\vee ← Disjunktion
\otimes	\wedge ← Konjunktion
n	0
e	1
\bar{a}	\bar{a}

Schreibweise: $a + b$ für $a \vee b$
 $a \& b$ für $a \wedge b$

Schaltalgebra (3)

Huntington'sche Axiome in der Schaltalgebra:

H0: Abgeschlossenheit

H1: $a \vee b = b \vee a$
 $a \wedge b = b \wedge a$

H2: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

H3: $a \vee 0 = a$
 $a \wedge 1 = a$

H4: $a \wedge \bar{a} = 0$
 $a \vee \bar{a} = 1$

Beweis: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

Zu zeigen: $(\bar{a} \vee \bar{b})$ das Komplementelement von $(a \wedge b)$

Zu zeigen: Komplementgesetze $(x \vee \bar{x} = 1)$ und $(x \wedge \bar{x} = 0)$ sind erfüllt

$$(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) = (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$$