

Zahlendarstellung und Kodierung

- Zahlensysteme
- Darstellung negativer Zahlen
- Darstellung Fest- und Fließkommazahlen
- Kodierungen zur Zahlen- und Zeichendarstellung
- Fehlerkorrigierende Codes

ASCII – Kodierung

Anmerkungen:

- Die höherwertigen Bits der Kodierung eines Zeichens sind in der Kopfzeile abzulesen, die niederwertigen Bits in der ersten Spalte

Beispiel: A → 100 0001₂

- 128 mögliche Zeichen → 2 * 26 Buchstaben, 10 Ziffern, 32 Kommunikationssteuer und 32 Interpunktionszeichen

Unicode: Entwurfsprinzipien (1)

- Unicode-Zeichenkodierungen haben sämtlich eine Länge von 16 Bits
- Der gesamte Kodeumfang von 16 Bits steht für die Zeichenkodierung zur Verfügung
- Die Unicode-Norm kodiert Zeichen, nicht Zeichendarstellungen oder Erscheinungsbild
- Zeichen haben eine wohl definierte Semantik
- Die Unicode-Norm kodiert einfachen (nicht formatierten) Text
- Unicode-Zeichen werden in logischer Reihenfolge gespeichert

Beispiel: Datenwort: $x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0$
 10011011
 $\hookrightarrow x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_8 = 1 = x_0$
Codewort: $x_8 x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0$
 100110111
 $\hookrightarrow x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_8 = 0$
gerade Parität!
ergänzt auf gerade Anzahl von "1"

- BCD-Kodierung (engl. Binary coded decimal):
 - Kodierung der zehn Dezimalziffern durch ihr 4-Bit Dualäquivalent (Tetrade)
 - 6 der 16 möglichen Kodierungen stellen keine gültige Dezimalziffer dar, sie heißen daher **Pseudotetraden**
 - Nachteil: Suboptimale Speicherplatzausnutzung und Probleme bei der Ausführung arithmetischer Operationen
- Gray-Kodierung:
 - **Einschrittige** Kodierung
 - Vorteile bei der A/D-Wandlung und für mechanische Abtaster
 - Keine feste Stellenwertigkeit → Die Ausführung arithmetischer Operationen ist recht schwierig

Platzbeschränkungen

Für deutsche Umlaute oder andere nationale Besonderheiten ist kein Platz:

2 Möglichkeiten:

- Nationale Varianten der ASCII-7-Bit Kodierung: z. B. ISO-7-Bit oder DIN 66003 (deutsche Variante mit Umlauten)
- Erweiterung auf eine 8 Bit Kodierung (Byte-Orientierung der Rechner): Nutzung der zusätzlichen 128 Zeichen für nationale Besonderheiten und weitere Sonderzeichen.

Weitere Möglichkeit des zusätzlichen Bits beim Übergang von 7 auf 8 Bit ist die **Fehlererkennung** (wird später behandelt)

Unicode: Entwurfsprinzipien (2)

- Gleiche Zeichen werden gleichgesetzt
- Die Unicode-Norm erlaubt die dynamische Erstellung von zusammengesetzten Zeichen
- Für zusammengesetzte Zeichen mit eigener Kodierung stellt die Unicode-Norm eine Übertragung in die äquivalente Sequenz aus Grundzeichen und modifizierenden Zeichen bereit
- 1-zu-1-Umsetzung zwischen Unicode und anderen weit verbreiteten Normen ist garantiert

Einfache Bit-Fehlererkennung

$$x_0 \oplus (x_1 \oplus \dots \oplus x_8) = 0$$

Die Gleichung wird falsch, wenn ein **einzelnes** Bit oder eine **ungerade** Zahl von Bits fehlerhaft geworden ist.

→ Einfache Bitfehlererkennung

Der Kode kann jedoch **keine** Fehler erkennen, bei denen eine **gerade** Zahl von Bits fehlerhaft ist, und ermöglicht auch keine Fehlerkorrektur.

Sollen nicht nur Zahlen, sondern auch Buchstaben, Sonderzeichen, etc. z.B. zur Textverarbeitung kodiert werden, so ist eine andere Kodierung erforderlich

26 Buchstaben

→ **mindestens 5 Bit sind zur Kodierung erforderlich**

Heute gebräuchliche Kodierungsbreiten zur Textdarstellung: **7 - 16 Bit**

Unicode (http://www.unicode.org)

- Firmenspezifische und nationale, nicht miteinander kompatible 7-Bit- und 8-Bit-Zeichenkodierungen bis weit in die 80-er Jahre
- Chinesische, japanische, koreanische, arabische, thailändische, bengalische, hebräische und viele andere Schriftzeichen zum großen Teil überhaupt nicht oder nur über **komplizierte Kodierungssequenzen variabler Länge** kodiert
- **Weltweit genormte Kodierung aller Zeichen ist notwendig, um den einfachen Datenaustausch möglich zu machen** → **Unicode**

2.5 Fehlerkorrigierende Codes

- Einfaches Schema zur Fehlererkennung
 - Quersumme
- Hammingcode zur Fehlerkorrektur
 - Aufbau des Hammingcodes
 - Erkennung und Korrektur von 1-Bit-Fehlern
 - Erkennung von 2-Bit-Fehlern

Beispiel: Codewort $x_8 x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0$
 100010111
 $\hookrightarrow x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_8 = 1$
 \Rightarrow Fehler
absch. keine Positionsinformation!

ASCII (American Standard Code for Information Interchange) ist die bekannteste Kodierung zur Textdarstellung. Es handelt sich um eine **7-Bit-Kodierung**

	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SPACE	@	P	Q	R	D
0001	SOH	DC 1	!	1	A	O	a	q
0010	STX	DC 2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC 3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC 4	\$	4	D	T	d	t
0101	ENO	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(8	H	X	h	x
1001	HT	EM)	9	I	Y	i	y
1010	LF	STB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[k	[
1100	FF	FS	<	<	L	\	l	
1101	CR	GS	=	=	M]	m]
1110	SO	RS	>	>	N	^	n	^
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Geschichte des Unicodes

- Notwendigkeit für eine genormte Kodierung aller Zeichen, die in der Welt geschrieben werden oder wurden
- **Unicode-Konsortium** begann Ende der 80-er Jahre mit der Entwicklung einer solchen Zeichenkodierung
- Im Konsortium sind viele Soft- und Hardwarefirmen wie Apple, IBM und Microsoft, sowie nichtamerikanische Firmen vertreten:
 - die bisherigen nationalen, internationalen und firmenspezifischen Zeichenkodierungen werden durch die Unicode-Norm abgelöst
 - Übergang wird nur sehr langsam erfolgen (Kompatibilität zu bisherigen Kodierungen)

Fehlererkennung durch Quersummenbits

Jedem Datenwort, z. B. 8-Bit-Wort x_7, \dots, x_0 wird ein neuntes Bit x_8 , das Prüfbit, angehängt, das sich durch Addition mod 2 oder Quersumme berechnet:

$$x_8 = x_7 \oplus \dots \oplus x_0$$

Damit wird jedes Kodewort auf gerade Parität (Quersumme) ergänzt.

Der zusätzliche Speicheraufwand ermöglicht damit eine einfache Fehlerprüfung:

$$x_8 \oplus (x_7 \oplus \dots \oplus x_0) = 0$$

Einfache Bit-Fehlererkennung

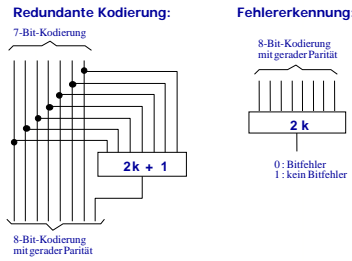
- Ein Bit verfälscht → Anzahl der Einsen nicht mehr gerade

Verfälschung einer geraden Zahl von Binärstellen ist nicht erkennbar

- **Alternative:** Man kann auch ein Paritätsbit anfügen, das zu einer ungeraden Anzahl von Einsen führt (*odd parity*) und die ungerade Anzahl überprüfen

Schema einer Fehlererkennung

Beispiel: Fehlererkennung bei der Übertragung von ASCII-Zeichen



Funktionsweise der Fehlererkennung

- 7-Bit-Kodierung wird auf eine redundante 8-Bit-Kodierung erweitert
- 8-te Bit wird durch die Quersumme (Exklusiv-Oder-Schaltung) erzeugt
- Diese erzeugt genau dann eine 1, wenn an den Eingängen eine ungerade Anzahl von Einsen anliegt (Paritätsbit)
- es wird eine 8-Bit-Kodierung erzeugt, die immer eine gerade Anzahl von Einsen aufweist (even parity)

Fehlerkorrektur durch Hammingcodes

- Fehlerkorrekturcodes können ein fehlerfreies Kodewort von einem fehlerhaften Codewort unterscheiden.
- Bei fehlerhaften Codewörtern sind die entsprechenden Bits im Kodewort innerhalb bestimmter Grenzen korrigierbar.
 - Mehr als ein Prüfbit pro Datenwort notwendig
- Um die Fehlerkorrektur vornehmen zu können, wird in den Korrekturbits eindeutig kodiert, ob und ggf. welche Bits im gesamten Kodewort (Daten- und Korrekturbits) fehlerhaft sind

Ein-Bit-Fehlerkorrektur

- Anzahl der Bits im zu übertragenden Codewort: n
- Eines der Bits kann falsch sein → n Fehlerfälle + fehlerfreier Fall
 - $n+1$ Fälle
- Kodierung dieser $n+1$ Fälle mit k Korrekturbits
 - $2^k \geq n+1$
- k Korrekturbits sind Teil des Codeworts
 - $n = m+k$
- ... Anzahl der Datenbits

Ein-Bit-Fehlerkorrektur

Notwendiger Aufwand für die sog. **Hammingcodes**:

$$2^k \geq m + k + 1$$

k: Zahl der zusätzlichen Korrekturbits
m: Zahl der Datenbits

Mindestaufwand: Ein-Bit Fehlerkorrekturcodes

Zahl der Datenbits	Zahl der Prüfbits	Bits insgesamt:
m	k	$m+k$
1	2	$m+2$
2 bis 4	3	$m+3$
5 bis 11	4	$m+4$
12 bis 26	5	$m+5$
27 bis 57	6	$m+6$
...

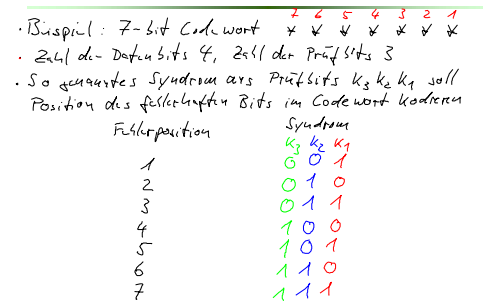
Aufbauprinzipien

Unterschiedliche Aufbauprinzipien sind möglich.

Hier: Einfaches Realisierungsschema

Vorteil: Beliebige Erweiterbarkeit auf größere Datenwortlängen

Der Ansatz verwendet k verschiedene Prüfgleichungen für die Quersummen QS_0 bis QS_{k-1}



Ansatz (1)

Die i -te Quersumme (QS_i) ergänzt alle Positionen im Kodewort, die die Potenz 2^i in ihrer Ziffernwertigkeit enthalten ($i = 0, 1, \dots, k-1$) auf gerade Parität

$k_1 = QS_0$ über alle ungeraden Stellen **1, 3, 5, 7, ...**

$k_2 = QS_1$ über die Stellen **2, 3, 6, 7, 10, 11, ...**

$k_3 = QS_2$ über die Stellen **4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, ...**

$k_4 = QS_3$ über die Stellen **8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...**

- 0001
- 0010
- 0011
- 0100
- 0101
- 0110
- 0111
- 1000
- 1001
- 1010
- 1011
- 1100
- 1101
- 1110
- 1111
- ...

Ansatz (2)

- Es werden gerade Quersummen verwendet
- Datenwörter werden zum Einfügen der Prüfbits gespreizt, indem die Codewortposition 2^i für die i -te Quersummenprüfstelle k_{i+1} freigehalten wird (m_i bezeichnen die Datenbits)

Damit erhält man folgendes Schema:

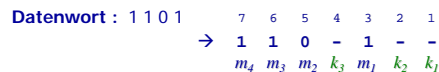
17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Position
	4							3					2	1	0	1	
m_{12}	k_3	m_{11}	m_{10}	m_9	m_8	m_7	m_6	m_5	k_2	m_4	m_3	m_2	k_1	m_1	k_2	k_1	Stellen

Ansatz (3)

- Beim Lesen eines evtl. fehlerhaften Codeworts kann durch **erneutes Bilden der Quersummen** ermittelt werden, ob und an welcher Position ein Fehler aufgetreten ist
- Die Quersummen geben dabei, als Dualzahl interpretiert, die fehlerhafte Position im Codewort an
- Liegt kein Fehler vor, dann sind alle Prüfgleichungen erfüllt

Beispiel (1)

Hammingcode mit 4 Datenbits und 3 Prüfbits, also 7-Bit-Kodewörtern



Bestimmung der Prüfbits:

$$k_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$k_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$k_3 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

→ **Kodewort:** 1 1 0 0 1 1 0

Beispiel (2)

Bildet man erneut die Prüfbits bei fehlerfreiem Codewort, ergibt sich als Syndrom $k_3 k_2 k_1$ der Wert 000.

Kodewort: 1 1 0 0 1 1 0

$$k_1 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$k_2 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$k_3 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

Kodewort: 1 1 0 0 0 1 0

$$k_1 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$k_2 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$k_3 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$k_3 k_2 k_1 = 011_2 = 3_{10}$ Fehler an 3. Position

Beispiel (3)

Ist ein **Prüfbit verfälscht**, z. B. k_3 , wird nur die betreffende Prüfgleichung beeinflusst, hier QS_2

Kodewort: $m_4 m_3 m_2 k_3 m_1 k_2 k_1$
1 1 0 1 1 1 0

$$k_1 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$k_2 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$k_3 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$k_3 k_2 k_1 = 100_2 = 4_{10}$ Fehler an 4. Position

Hammingcode: 2-Bitfehler (1)

- Die Betrachtungen gelten genau dann, wenn garantiert werden kann, dass tatsächlich **nur 1-Bitfehler** auftreten
- Der Hammingcode kann sehr wohl mehrfache Bitfehler erkennen, aber nur 1-Bitfehler korrigieren

Voraussetzung: Nur 1- oder 2-Bitfehler treten auf!

- Im Fall von 2-Bitfehlern werden diese vom Hammingcode erkannt, können aber nicht von 1-Bitfehlern unterschieden werden:

Bei dem Syndrom $k_3 k_2 k_1 = 0101$ kann sowohl einen 1-Bitfehler an der 5. Position als auch einen 2-Bitfehler an zwei unbekannt Positionen vorliegen.

Hammingkode : 2-Bitfehler (2)

- Um 1-Bitfehler von 2-Bitfehlern unterscheiden zu können, fügt man dem Hammingkode ein weiteres Paritätsbit hinzu

1-Bitfehler:

- Erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar und korrigierbar durch den Hammingkode

2-Bitfehler:

- Nicht erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar durch den Hammingkode, **aber** nicht korrigierbar, da die fehlerhaften Positionen nicht ermittelt werden können

n-Bitfehler (n>2): andere Verfahren

Hammingkode: Beispiel 2-Bitfehler

- Fall 1: Kein Fehler

$m_3 \ k_4 \ m_4 \ m_3 \ m_2 \ k_3 \ m_1 \ k_2 \ k_1$ **PB**
0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 $k_4 k_3 k_2 k_1 = 0000$

- Fall 2: 1-Bit-Fehler

0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 $k_4 k_3 k_2 k_1 = 0110$
Fehler an 6. Position

- Fall 3: 2-Bitfehler

0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 $k_4 k_3 k_2 k_1 = 0101$
2-Bit-Fehler

Hammingkode: Zusammenfassung

- An Standard-Codewörter lässt sich ein weiteres Quersummenbit anfügen, so dass Zweibitfehler im Codewort erkennbar werden.
- 32-Bit Wortlänge werden durch 7 Prüfbits zur Einzelfehlerkorrektur und Doppelfehlererkennung ergänzt.
- 64 Bit lange Datenwörter erfordern 8 Korrekturbits.
- Die Algebra endlicher Körper bietet über Generator- und Nullmatrix Verfahren, die zu jedem Datenwort ein Codewort erzeugen.