Ankündigungen

- Merkblatt zur Eintragung in die Tutorien
- Tutorien fangen am Montag an
- Skript ist ausverkauft. Aber ab nächsten Freitag wieder verfügbar

Kapitel 2

Zahlendarstellung und Kodierung

- Zahlensysteme
- Darstellung negativer Zahlen
- Darstellung Fest- und Fließkommazahlen
- Kodierungen zur Zahlen und Zeichendarstellung

Einführung

- Menschen rechnen gewöhnlich im Dezimalzahlensystem
- Rechner rechnen gewöhnlich im Dualzahlensystem

  → **eine Konvertierung ist erforderlich**
- Weitere Zahlensysteme wie Oktal-Zahlensystem oder Hexadezimal-Zahlensystem zur kompakteren Darstellung der sehr langen Dualzahlen verwendet.

  → **es ist notwendig, die Zusammenhänge und mathematischen Grundlagen dieser Zahlensysteme zu verstehen**

2.1 Zahlensysteme

Stellenwert-systeme

Wert X_b der Zahl als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i\, b^i$: Basis b = Anzahl der Symbole/Ziffern

$$X_b = z_n\, b^n + z_{n-1}\, b^{n-1} + \dots + z_1\, b + z_0 + z_{-1}\, b^{-1} + \dots + z_{-m}\, b^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i\, b^i$$

Beispiel: $\overset{1}{1}\overset{0}{0},\overset{-1}{0}\overset{-2}{1}_2 = 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = 2{,}25_{10}$

Interessanteste Zahlensysteme in der Informatik:

b	Zahlensystem	Zahlenbezeichnung
2	Dualsystem	Dualzahl
8	Oktalsystem	Oktalzahl
10	Dezimalsystem	Dezimalzahl
16	Hexadezimalsystem Sedezimalsystem	Hexadezimalzahl

2.1 Zahlensysteme

- Für Datenverarbeitung im Rechner sind die Zahlensysteme zur Basis 2 (binär), 8 (oktal) und 16 (hexadezimal) relevant
  - Einzelne Binärziffern (0/1) werden als Bit bezeichnet (Kleinste Informationseinheit)
- Probleme bei der Darstellung von Zahlen im Rechner:
  - Endlicher Speicher → nur Zahlen mit endlicher Genauigkeit darstellbar
  - Überläufe
  - Negative und positive Zahlen müssen unterschieden werden
  - Gleitkommazahlen müssen auch darstellbar sein

Zahlen-Umwandlung (1)

Umwandlung vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem zur Basis b

1. Methode: Euklidischer Algorithmus:

$$\begin{aligned} Z &= z_n\, 10^n + z_{n-1}\, 10^{n-1} + \dots + z_1\, 10 + z_0 + z_{-1}\, 10^{-1} + \dots + z_{-m}\, 10^{-m} \\ &= y_p\, b^p + y_{p-1}\, b^{p-1} + \dots + y_1\, b + y_0 + y_{-1}\, b^{-1} + \dots + y_{-q}\, b^{-q} \end{aligned}$$

Ziffern werden sukzessive, beginnend mit der höchstwertigen Ziffer, berechnet:

Euklidischer Algorithmus

1. **Schritt:** Berechne **p** gemäß der Ungleichung

   $b^p \le Z < b^{p+1}$ (setze i = p)
2. **Schritt:** Ermittle y_i und den Rest R_i durch Division von Z_i durch b^i

   $y_i = Z_i \text{ div } b^i$; $R_i = Z_i \bmod b^i$;
3. **Schritt:** Wiederhole **2. Schritt** für i = p-1, … und ersetze dabei nach jedem Schritt **Z** durch R_i, bis $R_i = 0$ oder bis b^i (und damit der Umrechnungsfehler) gering genug ist.

$Z = D \cdot Q + R$

$0 \le R < |D|$

Z … Dividend
D … Divisor
Q … Quotient
R … Rest

Z div D = Q

Z mod D = R

Beispiel: 10 div 3 = 3

10 mod 3 = 1

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Umwandlung von $15741{,}233_{10}$ ins Hexadezimalsystem

1.	$16^3 \leq 15741{,}233 < 16^4$	→ höchste Potenz 16^3
2.	$15741{,}233 : 16^3 = 3$	Rest 3453,233
3.	$3453{,}233 : 16^2 = D$	Rest 125,233
4.	$125{,}233 : 16 = 7$	Rest 13,233
5.	$13{,}233 : 1 = D$	Rest 0,233
6.	$0{,}233 : 16^{-1} = 3$	Rest 0,0455
7.	$0{,}0455 : 16^{-2} = B$	Rest 0,00253
8.	$0{,}00253 : 16^{-3} = A$	Rest 0,000088593
9.	$0{,}000088593 : 16^{-4} = 5$	Rest 0,000012299 (→ Fehler)

→ $15741{,}233_{10} \approx 3D7D{,}3BA5_{16}$

Zahlen-Umwandlung (2)

2. Methode: Abwandlung des Horner Schemas

Ganzzahligen und der gebrochenen Anteil getrennt betrachten

Umwandlung des ganzzahligen Anteils:

Eine ganze Zahl $X_b = \sum_{i=0}^{n} z_i b^i$ kann durch fortgesetztes Ausklammern auch in folgender Form geschrieben werden:

$$X_b = ((\ldots(((z_n\, b + z_{n-1})\, b + z_{n-2})\, b + z_{n-3})\, b \ldots)\, b + z_1)\, b + z_0$$

Die gegebene Dezimalzahl wird sukzessive durch die Basis **b** dividiert

- Interpretation von $X_b = \sum_{i=0}^{n} z_i b^i$ als Polynom

$X_b = \sum_{i=0}^{n} z_i x^i$ mit $x = b$

- Beispiel: $X_b = z_3 x^3 + z_2 x^2 + z_1 x + z_0$

$= ((z_3 x + z_2) \cdot x + z_1) \cdot x + z_0$ mit $x = b$

- Sukzessive Division:

$((z_3 b + z_2) b + z_1) b + z_0$	$: b = (z_3 b + z_2) b + z_1$	Rest z_0
$(z_3 b + z_2) b + z_1$	$: b = z_3 b + z_2$	Rest z_1
$z_3 b + z_2$	$: b = z_3$	Rest z_2
z_3	$: b = 0$	Rest z_3

Horner Schema

Die jeweiligen ganzzahligen Reste ergeben die Ziffern der Zahl X_b in der Reihenfolge von der niedrigstwertigen zur höchstwertigen Stelle

Beispiel: 15741_{10} ins Hexadezimalsystem

$15741_{10} : 16 = 983$	Rest 13	(D_{16})
$983_{10} : 16 = 61$	Rest 7	(7_{16})
$61_{10} : 16 = 3$	Rest 13	(D_{16})
$3_{10} : 16 = 0$	Rest 3	(3_{16})

→ $15741_{10} = 3D7D_{16}$

Umwandlung des Nachkommateils

Auch der gebrochene Anteil $\sum_{i=-m}^{0} z_i b^i$ einer Zahl lässt sich entsprechend schreiben:

$$Y_b = ((\ldots((y_{-m}\, b^{-1} + y_{m+1})\, b^{-1} + y_{-m+2})\, b^{-1} + \ldots + y_{-2})\, b^{-1} + y_{-1})\, b^{-1}$$

Verfahren:

Sukzessive Multiplikation des Nachkommateils der Dezimalzahl mit der Basis b des Zielsystems → die y_{-i} in der Reihenfolge der höchstwertigen zur niedrigstwertigen Nachkommaziffer

Beispiel: Horner Schema

Umwandlung von $0{,}233_{10}$ ins Hexadezimalsystem:

$0{,}233 * 16 = 3{,}728$ → $z_{-1} = 3$

$0{,}728 * 16 = 11{,}648$ → $z_{-2} = B$

$0{,}648 * 16 = 10{,}368$ → $z_{-3} = A$

$0{,}368 * 16 = 5{,}888$ → $z_{-4} = 5$

Abbruch bei genügend hoher Genauigkeit

→ $0{,}233_{10} \approx 0{,}3BA5_{16}$

Umwandlung: Basis b → Dezimalsystem

Werte der einzelnen Stellen nach nach der Stellenwertgleichung aufsummiert

Wert X_b der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i b^i$:

$$X_b = z_n b^n + z_{n-1} b^{n-1} + \ldots + z_1 b + z_0 + z_{-1} b^{-1} + \ldots + z_{-m} b^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i b^i$$

Beispiel: Basis b → Dezimalsystem

Konvertiere $101101{,}1101_2$ ins Dezimalsystem

101101,1101

$1 * 2^{-4} = 0{,}0625$

$1 * 2^{-2} = 0{,}25$

$1 * 2^{-1} = 0{,}5$

$1 * 2^{0} = 1$

$1 * 2^{2} = 4$

$1 * 2^{3} = 8$

$1 * 2^{5} = 32$

$45{,}8125_{10}$

Umwandlung beliebiger Stellenwertsysteme

- Zahl ins Dezimalsystem umwandeln
- Wandlung ins Zielsystem mit Methode 1 oder 2

Spezialfall:

Ist eine Basis eine Potenz der anderen Basis, können einfach mehrere Stellen zu einer Ziffer zusammengefasst werden oder eine Stelle kann durch eine Folge von Ziffern ersetzt werden.

Beispiel

Wandlung von $0110100{,}110101_2$ ins Hexadezimalsystem

$2^4 = 16 \Rightarrow$ **4 Dualstellen → 1 Hexadezimalstelle**

dual 0110100,110101

$$\downarrow$$

$$\underbrace{0011}_{3}\,\underbrace{0100}_{4}\,,\,\underbrace{1101}_{D}\,\underbrace{0100}_{4}$$

hexadezimal 3 4 , D 4

Ergänzen von Nullen zur Auffüllung auf Vierergruppen

2.2 Darstellung negativer Zahlen

Vier verschiedene Formate für die Darstellung negativer Zahlen im Rechner:

- Darstellung mit Betrag und Vorzeichen
- Stellenkomplement-Darstellung (Einerkomplement-Darstellung)
- Zweierkomplement-Darstellung
- Offset-Dual-Darstellung / Exzess-Darstellung

Darstellung mit Betrag und Vorzeichen

Eine Stelle wird als Vorzeichenbit benutzt.

Das ist das am weitesten links stehende Bit (MSB, most significant bit):

MSB = 0 ➨ positive Zahl

MSB = 1 ➨ negative Zahl

Beispiel:

0001 0010 = +18

1001 0010 = -18

Darstellung mit Betrag und Vorzeichen

Betrag durch 3 Bit:

0000 = 0	1000 = -0
0001 = 1	1001 = -1
0010 = 2	1010 = -2
0011 = 3	1011 = -3
0100 = 4	1100 = -4
0101 = 5	1101 = -5
0110 = 6	1110 = -6
0111 = 7	1111 = -7

Symmetrischer Zahlenbereich

Darstellung mit Betrag und Vorzeichen

Nachteile:

- Darstellung ändert sich bei Bereichserweiterung
- Bei Addition und Subtraktion müssen die Vorzeichen der Operanden gesondert betrachtet werden → Bedingt geeignet zur Implementierung auf dem Rechner
- **Redundanz:** Es gibt zwei Repräsentationen der Null (+0 und -0)

Verbesserung: Einerkomplement-Darstellung

Einerkomplement-Darstellung

(Auch Stellenkomplement-Darstellung genannt)

Stellenkomplement der entsprechenden positiven Zahl.

Um das Einerkomplement zu bilden, wird jedes Bit der entsprechenden positiven Zahl negiert.

0000 = 0	1000 = -7
0001 = 1	1001 = -6
0010 = 2	1010 = -5
0011 = 3	1011 = -4
0100 = 4	1100 = -3
0101 = 5	1101 = -2
0110 = 6	1110 = -1
0111 = 7	1111 = -0

Einerkomplement-Darstellung

- Stellenkomplement der entsprechenden positiven Zahl entspricht dem Einerkomplement:

$$z_{ek} = (2^{n+1} - 1) - z$$

- Negative Zahlen sind wiederum durch ein gesetztes Bit in der ersten Stelle charakterisiert
- Bitfolge $z_n\, z_{n-1} \ldots z_0$ hat den Wert:

$$Z = -z_n \cdot (2^n - 1) + z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + z_0$$

Einerkomplement-Darstellung

- Symmetrischer Zahlenbereich
- Vorteil gegenüber der Darstellung mit Vorzeichenbit: Erste Stelle bei Addition und Subtraktion muss **nicht** gesondert betrachtet werde.
- **Aber:** Es gibt weiterhin zwei Darstellungen der Null
- Beseitigung dieses Nachteils: Zweierkomplement

Zweierkomplement-Darstellung

Man addiert nach der Stellenkomplementierung noch eine 1

Man erhält so das Zweierkomplement: $z_{zk} = 2^{n+1} - z$

Komplementbildung

0···0 ➡ Einerkomplement 1···1

➡ Zweierkomplement 0···0

Zweierkomplement-Darstellung

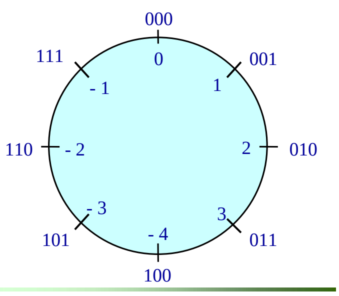
0000 = 0		1000 = -8
0001 = 1		1001 = -7
0010 = 2		1010 = -6
0011 = 3	**Unsymmetrischer Zahlenbereich**	1011 = -5
0100 = 4		1100 = -4
0101 = 5		1101 = -3
0110 = 6		1110 = -2
0111 = 7		1111 = -1

Zweierkomplement-Darstellung

Nachteil:

Unsymmetrischer Zahlenbereich. Die kleinste negative Zahl ist betragsmäßig um 1 größer als die größte positive Zahl

3-Bit-ZK-Zahlen:



Zweierkomplement-Darstellung

- Alle anderen negativen Zahlen werden um 1 verschoben, das MSB (Most Significant Bit) bleibt aber gleich 1.
- Aus der ersten Stelle kann das Vorzeichen der Zahl abgelesen werden
- Bitfolge $z_n\, z_{n-1} \dots z_0$ hat den Dezimalwert:

$$Z = -z_n \cdot 2^n + z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + z_0$$

1101	=	$-1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0$	= -3
1111 11101	= …		= -3

Zweierkomplement-Darstellung

Beispiel (n = 31)

```
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0010  = 2
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0001  = 1
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  = 0
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111  = -1
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1110  = -2

1000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000  = - 2^31
                                         = -2147483648

0111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111  =  2^31 - 1
                                         = 2147483 647
```


Beispiel

Die Zahl -77_{10} soll mit 8 Bit dargestellt werden

$77_{10} = 0100\ 1101_2$

Bitweise Komplementierung

Mit Vorzeichenbit : $-77 = 1100\ 1101_2$

Einerkomplement : $-77 = 1011\ 0010_2$

Addition von 1

Zweierkomplement : $-77 = 1011\ 0011_2$

Offset-Dual- (Exzess-) Darstellung

- Wird hauptsächlich bei der Exponenten-Darstellung von Gleitkommazahlen benutzt
- Die Darstellung einer Zahl erfolgt in Form ihrer **Charakteristik**
- Der gesamte Zahlenbereich wird durch Addition einer Konstanten (Exzess, Offset) so nach oben verschoben, dass die kleinste (negative) Zahl die Darstellung **0…0** erhält
- Bei n Stellen ist der Offset 2^{n-1}
- Der Zahlenbereich ist hier auch asymmetrisch

Zusammenfassung der Möglichkeiten

	Darstellung mit			
Dezimalzahl	Betrag + Vorzeichen	Einer-komplement	Zweier-komplement	Charakteristik
-4	- - -	- - -	1 0 0	0 0 0
-3	1 1 1	1 0 0	1 0 1	0 0 1
-2	1 1 0	1 0 1	1 1 0	0 1 0
-1	1 0 1	1 1 0	1 1 1	0 1 1
0	1 0 0/0 0 0	1 1 1/ 0 0 0	0 0 0	1 0 0
1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	1 0 1
2	0 1 0	0 1 0	0 1 0	1 1 0
3	0 1 1	0 1 1	0 1 1	1 1 1

2.3 Fest- und Gleitkommazahlen

Zahlendarstellung auf dem Papier:

Ziffern	**0 .. 9**
Vorzeichen	**+ -**
Komma	**,**

Zahlendarstellung im Rechner:

Binärziffern	**0, 1**

→ spezielle Vereinbarungen für die Darstellung von Vorzeichen und Komma im Rechner sind erforderlich.

Fest- und Gleitkommazahlen

Darstellung des Vorzeichens:

wurde im vorigen Abschnitt behandelt

Darstellung des Kommas: 2 Möglichkeiten

- Festkommadarstellung
- Gleitkommadarstellung

Festkommazahlen

Vereinbarung:

- Das Komma sitzt innerhalb des Maschinenwortes, das eine Dualzahl enthalten soll, an einer festen Stelle
- Meist setzt man das Komma hinter die letzte Stelle
- Andere Zahlen können durch entsprechende Maßstabsfaktoren in die gewählte Darstellungsform überführt werden
- **Negative Zahlen:** meist Zweierkomplement-Darstellung

Festkommazahlen

- Datentyp "integer" (Ganzzahlen) ist ein spezielles Festkommaformat.
- Manche Programmiersprachen erlauben die Definition von Ganzzahlen unterschiedlicher Länge.

Beispiel "C":

"short int", "int", "long int", "unsigned"

Probleme bei Festkommazahlen

- Keine ganz großen bzw. ganz kleinen Zahlen darstellbar

  Zweierkomplement mit n Vorkommastellen und k Nachkommastellen:

  - Zahlen mit größtem Absolutbetrag: -2^n und 2^n-2^{-k}
  - Zahlen mit kleinstem Absolutbetrag: -2^{-k} und 2^{-k}

- Keine Abgeschlossenheit: $2^{n-1} + 2^{n-1}$ ist nicht darstellbar, obwohl die Operanden darstellbar sind
- Assoziativgesetz und Distributivgesetz gelten nicht, da bei der Anwendung der Gesetze evtl. der darstellbare Zahlenbereich verlassen wird

$$(2^{n-1} + 2^{n-1}) - 2^{n-1} \neq 2^{n-1} + (2^{n-1} - 2^{n-1})$$

- Größte Zahl: $z = \overset{n}{0}\underbrace{\overset{n-1}{1}1 \ldots \overset{1}{1}\overset{0}{1}}_{n\ \text{"1"}},\underbrace{\overset{-1}{1}\overset{-2}{1} \ldots \overset{-k+1}{1}\overset{-k}{1}}_{k\ \text{"1"}}$

$$z = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-k+1} + 2^{-k}$$

$$2 \cdot z = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^{-k+1}$$

$$z = 2z - z = 2^n - 2^{-k}$$

- kleinste positive Zahl:

z

Gleitkomma-Darstellung

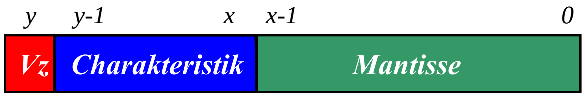
- Zur Darstellung von Zahlen, die betragsmäßig sehr groß oder sehr klein sind, verwendet man die **Gleitkomma-Darstellung**.
- Sie entspricht einer halblogarithmischen Form

$$X = \pm \mathit{Mantisse} \cdot b^{\mathit{Exponent}}$$

- Die Basis ***b*** ist für eine bestimmte Gleitkomma-Darstellung fest (meist 2 oder 16) und braucht damit nicht mehr explizit repräsentiert zu werden.
- Gleitkommazahlen werden meist nicht im Zweierkomplement, sondern in Betrag-Vorzeichen-Form dargestellt.

Gleitkomma-Maschinenformat

$$X = \pm \mathit{Mantisse} \cdot b^{\mathit{Exponent}}$$



$$X = (-1)^{Vz} * (0{,}Mantisse) * b^{Exponent}$$

$$Exponent \;\; = Charakteristik - b^{(y-1)-x}$$

Gleitkomma-Darstellung

- Bei der **Mantisse** ist die Lage des Kommas wieder durch Vereinbarung festgelegt (meist links vom MSB).
- Der **Exponent** ist eine ganze Zahl, die in Form ihrer Charakteristik dargestellt wird.
- Sowohl für die Charakteristik als auch für die Mantisse wird im Rechner ein **feste Anzahl von Speicherstellen** festgelegt.
- Die Länge der Charakteristik ***y-x*** bestimmt die Größe des Zahlenbereichs, die Länge der Mantisse ***x*** die Genauigkeit der Darstellung.

Normalisierung

Eine Gleitkommazahl heisst **normalisiert**, wenn für den Wert der Mantisse gilt:

$$\frac{1}{b} \leq 0{,}Mantisse \; < \; 1$$

→ **In dualer Darstellung ist die erste Stelle nach dem Komma gleich 1.**

Ausnahme:

Bei der Zahl 0 sind alle Stellen der Mantisse gleich Null

Normalisierung

- Legt man für die Zahl 0 ein spezielles Bitmuster fest, ist die erste Stelle der Mantisse in normalisierter Form immer gleich 1 (d.h. 0,1 . . .)
- Die erste Stelle der Mantisse braucht im Maschinenformat gar nicht erst dargestellt zu werden:

  → **Man spart ein Bit bei der Speicherung oder gewinnt bei gleichem Speicherbedarf ein Bit an Genauigkeit.**

- Bei arithmetischen Operationen und bei der Konversion in andere Darstellungen darf diese Stelle natürlich nicht vergessen werden.