UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Scherer
Dipl.-Math. Heike Stoll

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen – SS 2005

Lösung zum 4. Übungsblatt — 03. Juni 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Bestimmen Sie $a_0, \ldots, a_7 \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $s_a : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s_a(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 & -2 \le x \le -1 \\ (x+1)^4 + a_4 x^4 - 1 & -1 \le x \le 0 \\ a_5 x + a_6 x^2 + a_7 x^3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\triangle := \{-2,-1,0,1\}$ mit den Randbedingungen $s_a(-2) = -12$ und $s_a(1) = 16$ ist.

(b) Entwickeln Sie das Polynom $p(x) = 1 + 3x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + 24x^5 - 16x^6$ nach Tschebyscheff-Polynomen.

Lösung:

(a) Für einen kubischen Spline muss gelten:

(1) $s|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathcal{P}_3,\ j = 1,\ldots,n$

(2) $s \in C^2([x_0,x_n])$

Hier ist $n = 3$ und $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Damit folgt

(1)

$$\begin{aligned} s_1(x) &:= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ \in \mathcal{P}_3 \ \checkmark \\ s_2(x) &:= (x+1)^4 + a_4 x^4 - 1 \ \in \mathcal{P}_3 \ \Rightarrow \ \boxed{a_4 = -1} \ \checkmark \\ s_3(x) &:= a_5 x + a_6 x^2 + a_7 x^3 \ \in \mathcal{P}_3 \ \checkmark \end{aligned}$$

(2) Untersuchung der Anschlussstellen x_j, $j = 1, 2$, d.h. es muss gelten

$$\begin{aligned} s_j(x_j) &= s_{j+1}(x_j) \\ s_j'(x_j) &= s_{j+1}'(x_j) \\ s_j''(x_j) &= s_{j+1}''(x_j) \end{aligned}$$

Die Ableitungen von s_1, s_2 und s_3 ergeben sich zu

$$\begin{aligned} s_1'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2, & s_1''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x \\ s_2'(x) &= 4(x+1)^3 - 4x^3, & s_2''(x) &= 12(x+1)^2 - 12x^2 \\ s_3'(x) &= a_5 + 2a_6 x + 3a_7 x^2, & s_3''(x) &= 2a_6 + 6a_7 x \end{aligned}$$

Damit folgt für die Anschlussstellen x_j, $j = 1, 2$:

$$j = 1: \qquad s_1(x_1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \overset{!}{=} s_2(x_1) = (-1+1)^4 - (-1)^4 - 1 = -2 \qquad (1)$$

$$s_1'(x_1) = a_1 - 2a_2 + 3a_3 \overset{!}{=} s_2'(x_1) = 4(-1+1)^3 - 4(-1)^3 = 4 \qquad (2)$$

$$
\begin{aligned}
& s_1''(x_1) = 2a_2 - 6a_3 \overset{!}{=} s_2''(x_1) = 12(-1+1) - 12(-1)^2 = -12 && (3)\\
j = 2: \quad & s_2(x_2) = 0 \overset{!}{=} s_3(x_2) = 0 && (4)\\
& s_2'(x_2) = 4 \overset{!}{=} s_3'(x_2) = a_5 \;\Rightarrow \boxed{a_5 = 4} && (5)\\
& s_2''(x_2) = 12 \overset{!}{=} s_3''(x_2) = 2a_6 \;\Rightarrow \boxed{a_6 = 6} && (6)\\
\text{Randbedingungen:} \quad & s_a(-2) = -12 \;\Rightarrow\; s_1(-2) = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \overset{!}{=} -12 && (7)\\
& s_a(1) = 16 \;\Rightarrow s_3(1) = a_5 + a_6 + a_7 \overset{!}{=} 16 && (8)
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (1), (7), (2) und (3) liefern ein LGS für a_0, a_1, a_2, a_3:

$$
\begin{array}{cccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline
1 & -1 & 1 & -1 & -2\\
1 & -2 & 4 & -8 & -12\\
 & 1 & -2 & 3 & 4\\
 & & 2 & -6 & -12
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline
1 & -1 & 1 & -1 & -2\\
 & -1 & 3 & -7 & -10\\
 & 1 & -2 & 3 & 4\\
 & & 1 & -3 & -6
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline
1 & -1 & 1 & -1 & -2\\
 & -1 & 3 & -7 & -10\\
 & & 1 & -4 & -6\\
 & & 1 & -3 & -6
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline
1 & -1 & 1 & -1 & -2\\
 & -1 & 3 & -7 & -10\\
 & & 1 & -4 & -6\\
 & & & 1 & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline
1 & -1 & 1 & 0 & -2\\
 & -1 & 3 & 0 & -10\\
 & & 1 & 0 & -6\\
 & & & 1 & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline
1 & -1 & 0 & 0 & 4\\
 & -1 & 0 & 0 & 8\\
 & & 1 & 0 & -6\\
 & & & 1 & 0
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-4 = a_0}\\
 & 1 & 0 & 0 & \boxed{-8 = a_1}\\
 & & 1 & 0 & \boxed{-6 = a_2}\\
 & & & 1 & \boxed{0 = a_3}
\end{array}
$$

Aus Gleichung (8) erhalten wir nun den Wert für a_7

$$a_5 + a_6 + a_7 = 4 + 6 + a_7 = 16 \;\Rightarrow\; \boxed{a_7 = 6}.$$

Damit ist der kubische Spline s_a gegeben durch:

$$
s_a(x) = \begin{cases}
-4 - 8x - 6x^2 & -2 \le x \le -1\\
(x+1)^4 - x^4 - 1 = 4x^3 + 6x^2 + 4x & -1 \le x \le 0\\
4x + 6x^2 + 6x^3 & 0 \le x \le 1
\end{cases}
$$

(b) Für die Tschebyscheff-Polynome gilt:

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ für } n \ge 1$$

Damit erhalten wir die Tschebyscheff-Polynome bis $n = 6$ zu:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1\\
T_5(x) &= 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
T_6(x) &= 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1
\end{aligned}
$$

Da nun gelten soll $p(x) \stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^{6} a_j T_j(x)$ erhalten wir ein LGS $Ta = b$ für die Koeffizienten a_j mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ & & 2 & 0 & -8 & 0 & 18 \\ & & & 4 & 0 & -20 & 0 \\ & & & & 8 & 0 & -48 \\ & & & & & 16 & 0 \\ & & & & & & 32 \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \\ 24 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 21 \\ -25/2 \\ 17/2 \\ -4 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow p(x) &= \sum_{j=0}^{6} a_j T_j(x) \\ &= -\frac{1}{2}T_6(x) + \frac{3}{2}T_5(x) - 4T_4(x) + \frac{17}{2}T_3(x) - \frac{25}{2}T_2(x) + 21T_1(x) - 8T_0(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d > 0, \; ad + bc \neq 0.$$

Anstelle von $Ax = b$ löse man das Gleichungssystem

$$D_1^{-1} A D_2 y = D_1^{-1} b \text{ mit } D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{abcd} & 0 \\ 0 & cd \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{abcd} & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ergibt sich dann aus $x = D_2 y$. Berechnen Sie für $a = 100$, $b = 0.01$, $c = 99$, $d = 0.01$ die Konditionszahlen $\text{cond}_Z(A)$ und $\text{cond}_Z(D_1^{-1} A D_2)$.

(b) Die Funktion $f(x) = \cot\left(\frac{x}{2}\right)$ kann durch

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$$

berechnet werden. Untersuchen Sie die Kondition von $f(x)$ bezüglich einer Störung in x, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mit absolutem und relativem Fehler.

(c) $f(x)$ wird mit dem Algorithmus

$$y_0 = \sin(x), \; y_1 = \cos(x), \; y_2 = 1 - y_1, \; y_3 = \frac{y_0}{y_2}$$

ausgewertet. Untersuchen Sie die Kondition dieses Algorithmus (bezüglich absolutem und relativem Fehler).

Lösung:

(a) Für die gegebenen Werte erhalten wir die Matrix A und ihre Inverse zu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0.01 \\ 99 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{100\cdot 0.01 - 0.01\cdot 99}\begin{pmatrix} 0.01 & -0.01 \\ -99 & 100 \end{pmatrix} = 100\begin{pmatrix} 0.01 & -0.01 \\ -99 & 100 \end{pmatrix}$$

Die Kondition der Matrix A ist mit der Matrixnorm $N_Z(A) = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cond}_Z(A) &= N_Z(A)N_Z(A^{-1}) \\
N_Z(A) &= \max\{|a|+|b|, |c|+|d|\} = \max\{a+b, c+d\} = \max\{100.01, 99.01\} = 100.01 \\
N_Z(A^{-1}) &= 100\max\{0.01+0.01, 100+99\} = 19900 \\
\mathrm{cond}_Z(A) &= 100.01\cdot 19900 = 1990199 \approx 2\cdot 10^6
\end{aligned}$$

Die Matrix $D_1^{-1}AD_2$ und ihre Inverse ergeben sich aus:

$$\begin{aligned}
D_1^{-1}AD_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{abcd}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{cd} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{abcd} & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{d}} \\ \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{d}} & a \end{pmatrix} \\
(D_1^{-1}AD_2)^{-1} &= D_2^{-1}A^{-1}D_1 = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{abcd}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ac} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{abcd}} & 0 \\ 0 & cd \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -\frac{\sqrt{bcd}}{\sqrt{a}} \\ -\frac{\sqrt{bcd}}{\sqrt{a}} & d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Zeilensummennormen von $D_1^{-1}AD_2$ und ihrer Inversen und die Kondition von $D_1^{-1}AD_2$:

$$\begin{aligned}
N_Z(D_1^{-1}AD_2) &= \max\left\{|a| + \left|\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{d}}\right|, |a| + \left|\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{d}}\right|\right\} = a + \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{d}} \\
&= 100 + \frac{\sqrt{100\cdot 0.01\cdot 99}}{\sqrt{0.01}} = 199.4987437 \approx 2\cdot 10^2 \\
N_Z(D_2^{-1}A^{-1}D_1) &= \frac{1}{ad-bc}\max\left\{|d| + \left|\frac{\sqrt{bcd}}{\sqrt{a}}\right|, |d| + \left|\frac{\sqrt{bcd}}{\sqrt{a}}\right|\right\} \\
&= \frac{1}{100\cdot 0.01 - 0.01\cdot 99}\left(0.01 + \frac{\sqrt{0.01\cdot 99\cdot 0.01}}{\sqrt{100}}\right) = 1.994987437 \approx 2 \\
\mathrm{cond}_Z(D_1^{-1}AD_2) &= 397.9974874 \approx 4\cdot 10^2
\end{aligned}$$

Fazit: Die Kondition des modifizierten Systems ist deutlich besser, als die des ursprünglichen Systems, dessen Lösung man aus der Bedingung $x = D_2y$ leicht aus der Lösung des modifizierten Systems berechnen kann.

(b) Es gelten folgende Additionstheoreme:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos(x)) \tag{9}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{10}$$

Damit erhalten wir

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \overset{(9)}{=} \frac{\sin(x)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \overset{(10)}{=} \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cot\left(\frac{x}{2}\right)$$

Damit können wir z durch $z := f(x) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$ definieren. Die Funktion $f(x)$ ist stetig und differenzierbar für $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Ableitung der Funktion f ergibt sich mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

zu

$$f'(x) = \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Damit erhalten wir den absoluten Fehler

$$|\tilde{\varepsilon}| = |f'(x)\varepsilon| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \varepsilon \overset{(9)}{=} \frac{1}{1 - \cos(x)} \varepsilon$$

und den relativen Fehler

$$|\tilde{\delta}| = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \delta \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{x\,(1-\cos(x))}{\sin(x)} \delta \right| \overset{(9)}{=} \frac{1}{2} \left| \frac{x \cdot 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x)} \delta \right| = \left| \frac{x}{\sin(x)} \delta \right|.$$

Betrachte zuerst die kritischen Punkte $x = 2\,k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ für den absoluten Fehler

$$\lim_{x \to 2\,k\pi} \frac{1}{1 - \cos(x)} \to \infty \qquad \text{schlecht konditioniert}$$

und dann die kritischen Punkte $x = 2\,k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ für den relativen Fehler

$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = 0: \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} \overset{\text{l' Hospital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \qquad \text{gut konditioniert}$$

$$k \neq 0 \;\Rightarrow\; x = 2\,k\pi: \lim_{x \to 2\,k\pi} \frac{x}{\sin(x)} \to \infty \qquad \text{schlecht konditioniert.}$$

(c) Fehler bei der Auswertung von $y_0 = \sin(x)$: $\tilde{y}_0 = y_0 + \varepsilon = y_0(1+\delta)$
Fehler bei der Auswertung von $y_1 = \cos(x)$: $\tilde{y}_1 = y_1 + \varepsilon = y_1(1+\delta)$
Fehler bei der Auswertung von $y_2 = 1 - y_1$:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\partial y_2}{\partial y_1} \varepsilon = -\varepsilon \text{ und } \tilde{\delta} = \frac{\partial y_2}{\partial y_1} \cdot \frac{y_1}{y_2} \delta = -1 \cdot \frac{y_1}{1 - y_1} = \frac{y_1}{y_1 - 1} \delta$$

Fehler bei der Auswertung von $y_3 = \frac{y_0}{y_2}$:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\partial y_3}{\partial y_0} \varepsilon_0 + \frac{\partial y_3}{\partial y_2} \varepsilon_2 = \frac{1}{y_2} \varepsilon_0 - \frac{y_0}{y_2^2} \varepsilon_2$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\partial y_3}{\partial y_0} \cdot \frac{y_0}{y_3} \delta_0 + \frac{\partial y_3}{\partial y_2} \cdot \frac{y_2}{y_3} \delta_2 = \frac{1}{y_2} \cdot \frac{y_0}{y_0} y_2 \delta_0 - \frac{y_0}{y_2^2} \frac{y_2}{y_0} y_2 \delta_2 = \delta_0 - \delta_2$$

Der Algorithmus ist für $y_1 \approx 1$ und y_2 klein schlecht konditioniert, was $x \approx 2k\pi$ entspricht.

Aufgabe 3: (mündlich)

Untersuchen Sie für welche p, q die Berechnung der größten Nullstelle von $x^2 + 2px - q$ mit Hilfe der Formel $\varphi(p,q) := -p + \sqrt{p^2 + q}$ gut bzw. schlecht konditioniert ist.

Lösung: Wir definieren z durch $z := \varphi(p,q) = -p + \sqrt{p^2+q}$ und erhalten dann für den relativen Fehler

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta} = \frac{\tilde{z} - z}{z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{p}{z} \delta_p + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \cdot \frac{q}{z} \delta_q = \left[-1 + \frac{1}{2}(p^2+q)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2p \right] \frac{p}{z} \delta_p + \left[\frac{1}{2}(p^2+q)^{-\frac{1}{2}} \right] \frac{q}{z} \delta_q \\
&= \frac{-\sqrt{p^2+q} + p}{\sqrt{p^2+q}} \frac{p}{z} \delta_p + \frac{1}{2\sqrt{p^2+q}} \frac{q}{z} \delta_q = -\frac{p}{\sqrt{p^2+q}} \delta_p + \frac{-[p^2 - (p^2+q)]}{2\sqrt{p^2+q}} \frac{1}{z} \delta_q \\
&= -\frac{p}{\sqrt{p^2+q}} \delta_p + \frac{-(p + \sqrt{p^2+q})(p - \sqrt{p^2+q})}{2z\sqrt{p^2+q}} \delta_q = -\frac{p}{\sqrt{p^2+q}} \delta_p + \frac{(p + \sqrt{p^2+q})}{2\sqrt{p^2+q}} \delta_q
\end{aligned}$$

Gut konditioniert für $q > 0$, da gilt:

$$\left| \frac{p}{\sqrt{p^2+q}} \right| \leq 1 \text{ und } \left| \frac{p + \sqrt{p^2+q}}{2\sqrt{p^2+q}} \right| = \left| \frac{p}{2\sqrt{p^2+q}} + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left[\left| \frac{p}{\sqrt{p^2+q}} \right| + 1 \right] \leq 1$$

und schlecht konditioniert für $q \approx -p^2$, da dann $\sqrt{p^2+q} \approx 0$ und damit die Verstärkungsfaktoren

$$-\frac{p}{\sqrt{p^2+q}} \text{ und } \frac{p+\sqrt{p^2+q}}{2\sqrt{p^2+q}}$$

groß werden.

Aufgabe 4: (mündlich)

Zeigen Sie, dass die Funktion $s_{\alpha,\beta} : [-3,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha(8+12x+6x^2+x^3)-(2+x) & -3 \le x \le -2 \\ 6+11x+6x^2+x^3 & -2 \le x \le -1 \\ 4+5x-x^3 & -1 \le x \le 0 \\ 4+5x+\beta x^3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\triangle := -3,-2,-1,0,1$ ist. Bestimmen Sie nun α und β so, dass die folgenden Randbedingungen erfüllt sind:

$$(a): \ s(-3) = 0 \text{ und } s(1) = 2, \quad (b): \ s''(-3) = 2 \text{ und } s''(1) = 0, \quad (c): \ s'(-3) = s'(1) = 8$$

Lösung: Für einen kubischen Spline muss gelten:

(1) $s|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathcal{P}_3, \ j = 1,\ldots,n$

(2) $s \in C^2([x_0,x_n])$

Hier ist $n = 4$ und $x_0 = -3$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Damit folgt

(1)

$$\begin{aligned} s_1(x) &:= \alpha(8+12x+6x^2+x^3)-(2+x) \ \in \mathcal{P}_3 \checkmark \\ s_2(x) &:= 6+11x+6x^2+x^3 \ \in \mathcal{P}_3 \checkmark \\ s_3(x) &:= 4+5x-x^3 \ \in \mathcal{P}_3 \checkmark \\ s_4(x) &:= 4+5x+\beta x^3 \ \in \mathcal{P}_3 \checkmark \end{aligned}$$

(2) Untersuchung der Anschlussstellen x_j, $j = 1,2,3$, d.h. es muss gelten

$$\begin{aligned} s_j(x_j) &= s_{j+1}(x_j) \\ s_j'(x_j) &= s_{j+1}'(x_j) \\ s_j''(x_j) &= s_{j+1}''(x_j) \end{aligned}$$

Die Ableitungen von s_1, s_2, s_3 und s_4 ergeben sich zu

$$\begin{aligned} s_1'(x) &= \alpha(12+12x+3x^2)-1, & s_1''(x) &= \alpha(12+6x) \\ s_2'(x) &= 11+12x+3x^2, & s_2''(x) &= 12+6x \\ s_3'(x) &= 5-3x^2, & s_3''(x) &= -6x \\ s_4'(x) &= 5+3\beta x^2, & s_4''(x) &= 6\beta x \end{aligned}$$

Damit folgt für die Anschlussstellen x_j, $j = 1,2,3$ mit $x_1 = -2, x_2 = -1$ und $x_3 = 0$:

$$\begin{aligned} j = 1: \qquad & s_1(x_1) = \alpha(8-24+24-8)-(2-2) = 0 \stackrel{!}{=} s_2(x_1) = 6-22+24-8 = 0 \checkmark \\ & s_1'(x_1) = \alpha(12-24+12)-1 = -1 \stackrel{!}{=} s_2'(x_1) = 11-24+12 = -1 \checkmark \\ & s_1''(x_1) = \alpha(12-12) = 0 \stackrel{!}{=} s_2''(x_1) = 12-12 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
j=2: \quad & s_2(x_2) = 6-11+6-1 = 0 \overset{!}{=} s_3(x_2) = 4-5+1 = 0 \checkmark \\
& s_2'(x_2) = 11-12+3 = 2 \overset{!}{=} s_3'(x_2) = 5-3 = 2 \checkmark \\
& s_2''(x_2) = 12-6 = 6 \overset{!}{=} s_3''(x_2) = 6 \checkmark \\
j=3: \quad & s_3(x_3) = 4 \overset{!}{=} s_4(x_3) = 4 \checkmark \\
& s_3'(x_3) = 5 \overset{!}{=} s_4'(x_3) = 5 \checkmark \\
& s_3''(x_3) = 0 \overset{!}{=} s_4''(x_3) = 0 \checkmark
\end{aligned}
$$

Nun zur Bestimmung von α und β mit Hilfe der Randbedingungen:

$$
\begin{aligned}
(a): \quad & s(-3) = 0 \Rightarrow s_1(-3) = \alpha(8-36+54-27) - (2-3) = -\alpha + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\
& s(1) = 2 \Rightarrow s_4(1) = 4+5+\beta = 9+\beta \overset{!}{=} 2 \Rightarrow \boxed{\beta = -7} \\
(b): \quad & s''(-3) = 2 \Rightarrow s_1''(-3) = \alpha(12-18) = -6\alpha \overset{!}{=} 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{3}} \\
& s''(1) = 0 \Rightarrow s_4''(1) = 6\beta \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0} \\
(c): \quad & s'(-3) = 8 \Rightarrow s_1'(-3) = \alpha(12-36+27) - 1 = 3\alpha - 1 \overset{!}{=} 8 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3} \\
& s'(1) = 8 \Rightarrow s_4'(1) = 5+3\beta \overset{!}{=} 8 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie für die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x)$, $n \geq 0$ die Orthogonalitätsbeziehungen

$$
\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases} .
$$

(b) Beweisen Sie die dreigliedrige Rekursionsformel für die Tschebyscheff-Polynome:

$$
T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x
$$

(c) Entwickeln Sie das Polynom $q(x) = -3 + 2x + 6x^2 + 4x^3 - 8x^4$ nach Tschebyscheff-Polynomen.

Lösung: Die Tschebyscheff-Polynome sind für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben durch

$$
T_k(x) = \cos(k \arccos x).
$$

Für die Beweise benötigen wir noch folgende Additionstheoreme:

$$
\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \tag{11}
$$

$$
\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{12}
$$

$$
\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \tag{13}
$$

(a) Das Integral lässt sich mit Hilfe der Substitution $t = \arccos x,\ x = \cos t,\ \frac{dx}{dt} = -\sin t$ wie folgt umformen:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt) \frac{-\sin t\, dt}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt \\
&= \int_0^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt
\end{aligned}
$$

Fallunterscheidung liefert nun:

(a) $m \neq n$:

$$\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)dt \overset{(11)}{=} \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos((n-m)t)+\cos((n+m)t)]dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)t)}{n-m}+\frac{\sin((n+m)t)}{n+m}\right]_0^\pi \overset{\sin k\pi=0}{=} 0$$

(b) $m = n \neq 0$:

$$\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)dt \overset{m=n}{=} \int_0^\pi \cos^2(nt)dt \overset{(13)}{=} \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2nt)dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2nt}{2n}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi$$

(c) $m = n = 0$:

$$\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)dt \overset{m=n=0}{=} \int_0^\pi \cos^2(0)dt = \pi$$

$\square$

(b) Mit $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)$ folgt

$$\begin{aligned}
k=0: \quad & T_0(x) = \cos(0\cdot\arccos x) = \cos 0 = 1 \checkmark \\
k=1: \quad & T_1(x) = \cos(1\cdot\arccos x) = x \checkmark \\
T_{k+1}(x) &= \cos((k+1)\arccos x) \\
&\overset{(12)}{=} \cos(k\arccos x)\cos(\arccos x) - \sin(k\arccos x)\sin(\arccos x) \\
&= T_k(x)\cdot x - \sin(k\arccos x)\sin(\arccos x) \\
T_{k-1}(x) &= \cos((k-1)\arccos x) \\
&\overset{(12)}{=} \cos(k\arccos x)\cos(\arccos x) + \sin(k\arccos x)\sin(\arccos x) \\
&= T_k(x)\cdot x + \sin(k\arccos x)\sin(\arccos x) \\
\Rightarrow\ T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) &= T_k(x)\cdot x + T_k(x)\cdot x = 2xT_k(x) \Leftrightarrow T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)
\end{aligned}$$

$\square$

(c) Für die Tschebyscheff-Polynome gilt nach Aufgabenteil (b) die Rekursionsformel

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ für } n \geq 1.$$

Damit erhalten wir die Tschebyscheff-Polynome bis $n = 4$ zu:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x\cdot x - 1 = 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) = 8x^4 - 8x^2 + 1
\end{aligned}$$

Aus der Bedingung $q(x) \overset{!}{=} \sum_{j=0}^4 a_j T_j(x)$ erhalten wir durch Koeffizientenvergleich ein LGS $Ta = b$ für die Koeffizienten a_j mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & -3 & 0 \\ & & 2 & 0 & -8 \\ & & & 4 & 0 \\ & & & & 8 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q(x) = \sum_{j=0}^4 a_j T_j(x) = -T_4(x) + T_3(x) - T_2(x) + 5T_1(x) - 3T_0(x).$$