UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Scherer
Dipl.-Math. Heike Stoll

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen – SS 2005

Lösung zum 6. Übungsblatt — 01. Juli 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten) (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die ersten drei Zeilen des Romberg-Schemas zur Berechnung des Integrals $J = \int\limits_0^2 3^{3x-1}dx = \frac{728}{9\ln 3}$ aus Aufgabe 3 vom 5. Übungsblatt.

(b) Gegeben sei das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ und die Knoten $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = 1$. Bestimmen Sie dazu eine Quadraturformel mit Exaktheitsgrad 2.

Lösung:

(a) Romberg-Verfahren, $h_0 = b - a$, $h_n = \frac{h_0}{2^n}$, $n = 1, \ldots, N$; $T_{0,n}$: zusammengesetzte Trapezregel

$$T_{0,n} := h_n \sum_{j=0}^{2^n}{}'' f(a + jh_n),\ n = 0, \ldots, N; \quad \sum{}'' :\ \text{erster und letzter Summand werden halbiert}$$

$$T_{m,n} := \frac{4^m T_{m-1,n+1} - T_{m-1,n}}{4^m - 1},\ m = 1, \ldots, N,\ n = 0, \ldots, N - m$$

Hier: $a = 0$, $b = 2$, $h_0 = 2$:

$$T_{0,0} = h_0 \sum_{j=0}^{2^0}{}'' f(a + jh_0) = (b - a)\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right) = 2\left(\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2)\right) = \frac{730}{3} = 243,\bar{3}$$

$$T_{0,1} = \frac{2-0}{2}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1) + \frac{1}{2}f(2)\right) = \frac{392}{3} = 130,\bar{6}$$

$$T_{0,2} = \frac{2}{4}\left(\frac{1}{2}f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}f(2)\right) = \frac{196}{3} + 14\sqrt{3} = 89.58204464$$

$$T_{0,3} = \frac{2}{8}\left(\frac{1}{2}f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{1}{2}f(2)\right) = 77.747472640$$

$$\begin{array}{ccccccc}
T_{0,i} & & T_{1,i} = \frac{4T_{0,i+1}-T_{0,i}}{3} & & T_{2,i} = \frac{4^2T_{1,i+1}-T_{1,i}}{4^2-1} & & T_{3,i} = \frac{4^3T_{2,i+1}-T_{2,i}}{4^3-1} \\
243,\bar{3} & & & & & & \\
 & \overset{-1/3}{\searrow} & & & & & \\
130,\bar{6} & \xrightarrow{4/3} & T_{1,0} = 93,\bar{1} & & & & \\
 & \overset{-1/3}{\searrow} & & \overset{-1/15}{\searrow} & & & \\
89,58 & \xrightarrow{4/3} & T_{1,1} = 75,89 & \xrightarrow{16/15} & T_{2,0} = 74,74 & & \\
 & \overset{-1/3}{\searrow} & & \overset{-1/15}{\searrow} & & \overset{-1/63}{\searrow} & \\
77,75 & \xrightarrow{4/3} & T_{1,2} = 73,80 & \xrightarrow{16/15} & T_{2,1} = 73,66 & \xrightarrow{64/63} & T_{3,0} = 73,65
\end{array}$$

(b) Eine Quadraturformel über dem Intervall $[a,b]$ besitzt Exaktheitsgrad m, falls $\int_a^b p(x)dx = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_m$ gilt.

Hier ist $m = 2$. Bestimme nun die Gewichte ω_j, $j = 1,2,3$ so, dass für $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$

$$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (a + bx + cx^2)dx = \sum_{j=1}^{3} \omega_j p(x_j) \text{ für } x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = 1$$

gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p(x)dx &= ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 \Big|_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{3} \omega_j p(x_j) \\
&= \omega_1 p(x_1) + \omega_2 p(x_2) + \omega_3 p(x_3) = \omega_1 p(0) + \omega_2 p\left(\frac{3}{4}\right) + \omega_3 p(1) \\
&= \omega_1 \cdot a + \omega_2 \left(a + \frac{3}{4}b + \frac{9}{16}c\right) + \omega_3(a + b + c) \\
&= a(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + b\left(\frac{3}{4}\omega_2 + \omega_3\right) + c\left(\frac{9}{16}\omega_2 + \omega_3\right)
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir durch Koeffizientenvergleich ein LGS für $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \omega_+\omega_2 + \omega_3 & = & 1 \\
(2) & \frac{3}{4}\omega_3 + \omega_3 & = & \frac{1}{2} \\
(3) & \frac{9}{16}\omega_2 + \omega_3 & = & \frac{1}{3}
\end{array}
\stackrel{\text{LGS}}{\Rightarrow}
\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 \\
 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\
 & \frac{9}{16} & 1 & \frac{1}{3}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|r}
1 & 1 & 1 & 1 \\
 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\
 & & \frac{1}{4} & -\frac{1}{24}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|r}
1 & 1 & 1 & 1 \\
 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\
 & & 1 & -\frac{1}{6}
\end{array}$$

$$\Rightarrow
\begin{array}{ccc|r}
1 & 1 & 0 & \frac{7}{6} \\
 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{2}{3} \\
 & & 1 & -\frac{1}{6}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|r}
1 & 0 & 0 & \frac{5}{18} \\
 & 1 & 0 & \frac{8}{9} \\
 & & 1 & -\frac{1}{6}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1 = \frac{5}{18},\ \omega_2 = \frac{8}{9},\ \omega_3 = -\frac{1}{6}$$

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten) (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für das Tschebyscheff-Polynom $T_4(x)$ die Bezier-Darstellung.

(b) Verwenden Sie den Algorithmus von de Casteljau zur Berechnung von $T_4\left(\frac{1}{4}\right)$, $T_4\left(\frac{1}{2}\right)$ und $T_4\left(\frac{3}{4}\right)$.

(c) Skizzieren Sie $T_4(x)$, die benötigten Bernstein-Grundpolynome und das Bezier-Polygon für $x \in [0,1]$.

Lösung:

(a) Mit der Rekursionsformel $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1
\end{aligned}$$

Für die Bezier-Darstellung muss gelten

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \beta_k b_{k4}(x)$$

mit

$$b_{kn}(x) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Für $n = 4$ und $k = 0, \ldots, 4$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
b_{k4}(x) &= \begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{4-k} \\
b_{04}(x) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} x^0 (1-x)^{4-0} = (1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 \\
b_{14}(x) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} x^1 (1-x)^{4-1} = 4x(1-x)^3 = 4x(1 - 3x + 3x^2 - x^3) = 4x - 12x^2 + 12x^3 - 4x^4 \\
b_{24}(x) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} x^2 (1-x)^{4-2} = 6x^2(1-x)^2 = 6x^2(1 - 2x + x^2) = 6x^2 - 12x^3 + 6x^4 \\
b_{34}(x) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} x^3 (1-x)^{4-3} = 4x^3(1-x) = 4x^3 - 4x^4 \\
b_{44}(x) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} x^4 (1-x)^{4-4} = x^4
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert für $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{4} \beta_k b_{k4}(x)$ ein LGS für die β_k's:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = -\frac{1}{3},\ \beta_3 = -3,\ \beta_4 = 1$$

$$\Rightarrow \quad T_4(x) = b_{04}(x) + b_{14}(x) - \frac{1}{3} b_{24}(x) - 3 b_{34}(x) + b_{44}(x)$$

(b) Der Algorithmus von de Casteljau dient zur Auswertung eines algebraischen Polynoms $p(x)$ an einer STelle $x = \xi$ in Bezier-Darstellung, d.h. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k b_{k,n}(x)$, mit Hilfe der Rekursion:

$$\begin{aligned}
\beta_\nu^{(0)} &= \beta_\nu,\ \nu = 0, \ldots, n \\
\beta_\nu^{(k)} &= (1-\xi)\beta_\nu^{(k-1)} + \xi \beta_{\nu+1}^{(k-1)},\ \nu = 0, \ldots, n-k,\ k = 1, \ldots, n \\
\beta_0^{(n)} &= p(\xi)
\end{aligned}$$

Hier ist nun mit den β_k aus Aufgabenteil (a)

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \beta_k b_{k,4}(x)$$

und wir erhalten mit dem Schema von de Casteljau

$$T_4\left(\frac{1}{4}\right):$$

$$\begin{array}{l|lllll}
\beta_0 = 1 & & & & & \\
 & \beta_0^{(1)} = (1-\frac{1}{4})\beta_0 + \frac{1}{4}\beta_1 = 1 & & & & \\
\beta_1 = 1 & & \beta_0^{(2)} = \frac{11}{12} & & & \\
 & \beta_1^{(1)} = \frac{2}{3} & & \beta_0^{(3)} = \frac{3}{4} & & \\
\beta_2 = -\frac{1}{3} & & \beta_1^{(2)} = \frac{1}{4} & & \beta_0^{(4)} = \frac{17}{32} = T_4\left(\frac{1}{4}\right) & \\
 & \beta_2^{(1)} = -1 & & \beta_1^{(3)} = -\frac{1}{8} & & \\
\beta_3 = -3 & & \beta_2^{(2)} = -\frac{5}{4} & & & \\
 & \beta_3^{(1)} = -2 & & & & \\
\beta_4 = 1 & & & & &
\end{array}$$

$T_4\left(\dfrac{1}{2}\right)$:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & \rangle & 1 & & & & & & & \\
1 & & & \rangle & \frac{2}{3} & & & & & \\
 & \rangle & \frac{1}{3} & & & \rangle & 0 & & & \\
-\frac{1}{3} & & & \rangle & -\frac{2}{3} & & & \rangle & -\frac{1}{2} = T_4\left(\frac{1}{2}\right) & \\
 & \rangle & -\frac{5}{3} & & & \rangle & -1 & & & \\
-3 & & & \rangle & -\frac{4}{3} & & & & & \\
 & \rangle & -1 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$T_4\left(\dfrac{3}{4}\right)$:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & \rangle & 1 & & & & & & & \\
1 & & & \rangle & \frac{1}{4} & & & & & \\
 & \rangle & 0 & & & \rangle & -\frac{5}{4} & & & \\
-\frac{1}{3} & & & \rangle & -\frac{7}{4} & & & \rangle & -\frac{31}{32} = T_4\left(\frac{3}{4}\right) & \\
 & \rangle & -\frac{7}{3} & & & \rangle & -\frac{7}{8} & & & \\
-3 & & & \rangle & -\frac{7}{12} & & & & & \\
 & \rangle & 0 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & &
\end{array}
$$

(c) Für die Darstellung des Bezier-Polygons benötigen wir noch die Bezier-Punkte:

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \beta_1^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{n} \\ \beta_2^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{n} \\ \beta_3^{(0)} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \frac{n}{n} \\ \beta_n^{(0)} \end{pmatrix}
$$

$$
\text{Hier: } n = 4: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

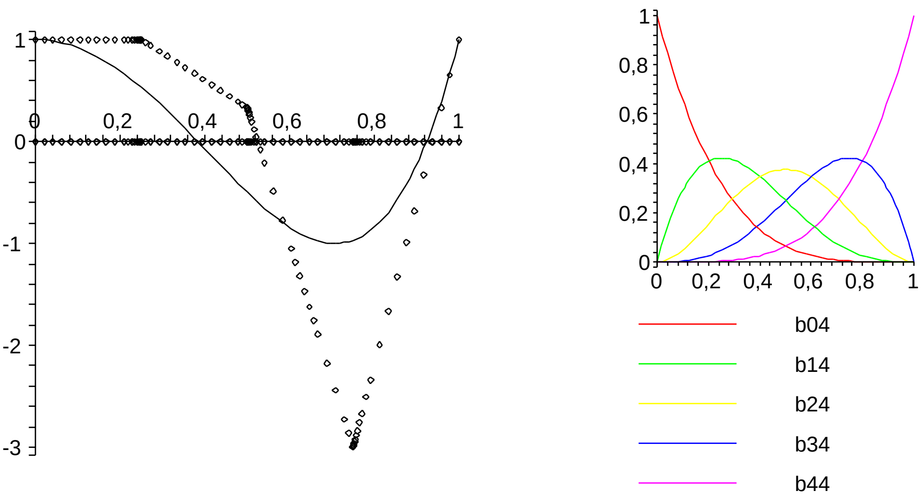

Abbildung 1: links: T_4 und Bezier-Polygon für $x \in [0,1]$, rechts: Bernstein-Grundpolynome b_{k4}

<u>**Aufgabe 3:**</u> (schriftlich zu bearbeiten) (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische reelle gerade (bzw. ungerade) Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ (bzw. $f(x) = -f(-x)$) für alle x, so ist β_k=0 für alle $k \in \mathbb{N}$ (bzw. $\alpha_k = 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$) und

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt, \; a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos ktdt, \; \left(\text{bzw. } \beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin ktdt\right) \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu der 2π-periodischen Funktion f, welche auf $[0, 2\pi)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \le x < \pi \\ -1 & \pi \le x < 2\pi \end{array} \right\}.$$

(c) Skizzieren Sie $f, \hat{F}_1, \hat{F}_3$ und $\hat{F}_5$, wobei $\hat{F}_i$ das zu f gehörige Fourierpolynom i-ten Grades ist.

Lösung:

(a) f gerade (bzw. ungerade), d.h. $f(x) = f(-x)$ (bzw. $f(x) = -f(-x)$) und f ist 2π-periodisch!

(a) f gerade

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)dx\right]$$

$$\text{Substitution } y := -x, \frac{dx}{dy} = -1$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi}^{0} f(-y)dy\right]$$

$$[f(y) = f(-y)] \; \to = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(y)dy\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)dx\right]$$

$$\text{Substitution } y := -x, \frac{dx}{dy} = -1$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx - \int_{\pi}^{0} f(-y)\cos(-ky)dy\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \cos(-z) = \cos(z) \\ f(-y) = f(y) \end{array}\right] \; \to = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \int_0^{\pi} f(y)\cos(ky)dy\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

$$\hat{\beta}_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx - \int_{\pi}^{0} f(-y)\sin(-ky)dy\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \sin(-z) = -\sin(z) \\ f(-y) = f(y) \end{array}\right] \; \to = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx - \int_0^{\pi} f(y)\sin(ky)dy\right] = 0$$

(b) f ungerade

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi}^{0} f(-y)dy\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)dx - \int_0^{\pi} f(x)dx\right] = 0$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx - \int_{\pi}^{0} f(-y)\cos(-ky)dy\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \cos(-z) = \cos(z) \\ f(-y) = -f(y) \end{array}\right] \; \to = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx - \int_0^{\pi} f(y)\cos(ky)dy\right] = 0$$

$$\hat{\beta}_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx - \int_{\pi}^{0} f(-y)\sin(-ky)dy\right]$$

$$\begin{bmatrix} \sin(-z) = -\sin(z) \\ f(-y) = -f(y) \end{bmatrix} \rightarrow = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx + \int_0^\pi f(y)\sin(ky)dy\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)dx$$

(b) Zu einer Funktion $f(x)$, die 2π-periodisch ist, erhalten wir die Fourier-Reihe

$$f \sim \frac{\hat{\alpha}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\hat{\alpha}_k \cos kx + \hat{\beta}_k \sin kx\right\}$$

und das Fourier-Polynom $\hat{F}_k$

$$\hat{F}_j \sim \frac{\hat{\alpha}_0}{2} + \sum_{k=1}^{j}\left\{\hat{\alpha}_k \cos kx + \hat{\beta}_k \sin kx\right\}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad \hat{\alpha}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx, \quad \hat{\beta}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx, \ k = 1, 2, \ldots$$

Hier ist die Funktion f die 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ -1 & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

und damit ist f eine ungerade Funktion, da $f(-x) = -f(x)$ und damit - nach Teil (a) - $\hat{\alpha}_k = 0$ und

$$\hat{\beta}_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin ktdt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ktdt = \frac{2}{\pi}\left[-\cos kt\frac{1}{k}\right]_0^\pi = -\frac{2}{k\pi}\left[\cos(k\pi) - \cos(0)\right] = \frac{2}{k\pi}\left[1 - (-1)^k\right]$$

$$\hat{F}_j \sim \sum_{k=1}^{j}\frac{2}{k\pi}\left[1 - (-1)^k\right]\sin kx$$

$$\hat{F}_1 \sim \frac{4}{\pi}\sin x, \ \hat{F}_2 \sim \hat{F}_1$$

$$\hat{F}_3 \sim \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right], \ \hat{F}_4 \sim \hat{F}_3$$

$$\hat{F}_5 \sim \frac{4}{3}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right], \ \hat{F}_6 \sim \hat{F}_5$$

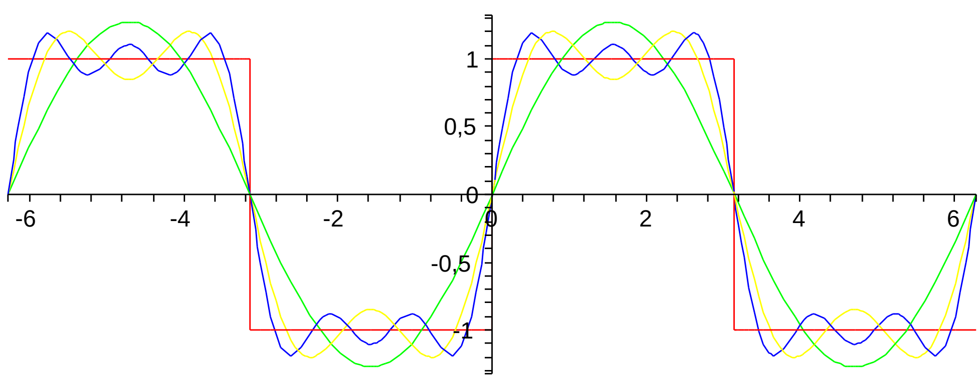

Abbildung 2: (c) Die Funktion f und die Fourierpolynome $\hat{F}_1, \hat{F}_3$ und $\hat{F}_5$

Aufgabe 4: (mündlich)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu der 2π-periodischen Funktion f, welche auf $[-\pi, \pi)$ gegeben sei durch $f(x) = x$.

(b) Skizzieren Sie $f, \hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{F}_3$ und $\hat{F}_4$, wobei $\hat{F}_i$ das zu f gehörige Fourierpolynom i-ten Grades ist.

Lösung:

(a) Zu einer Funktion $f(x)$, die 2π-periodisch ist, erhalten wir das Fourier-Polynom $\hat{F}_j,\ j = 1, 2, \ldots$

$$\hat{F}_j \sim \frac{\hat{\alpha}_0}{2} + \sum_{k=1}^{j} \left\{ \hat{\alpha}_k \cos kx + \hat{\beta}_k \sin kx \right\}$$

mit den Fourier-Koeffizienten $\hat{\alpha}_0$ und $\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k,\ k = 1, 2, \ldots$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad \hat{\alpha}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad \hat{\beta}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Da $f(x) = x$ eine ungerade Funktion ist ($f(-x) = -f(x)$), gilt - nach Aufgabe 3, Teil (a) - $\hat{\alpha}_k = 0$ und

$$\hat{\beta}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \sin kt\, dt.$$

Mit partieller Integration, d.h. $\int h(t)' g(t) dt = h(t) g(t) - \int h(t) g'(t) dt$ folgt ($h'(t) = \sin kt,\ g(t) = t$)

$$\hat{\beta}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \sin kt\, dt = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-t \cdot \frac{\cos kt}{k} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{\cos kt}{k} dt \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\pi \frac{(-1)^k}{k} \pi - 0 \right] + \left[\frac{\sin kt}{k^2} \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{2}{k} (-1)^{k+1}$$

$$\hat{F}_j \sim \sum_{k=1}^{j} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin kx, \ \hat{F}_1 \sim 2 \sin x, \ \hat{F}_2 \sim 2 \sin x - \sin 2x,$$

$$\hat{F}_3 \sim 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x, \ \hat{F}_4 \sim 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 4x$$

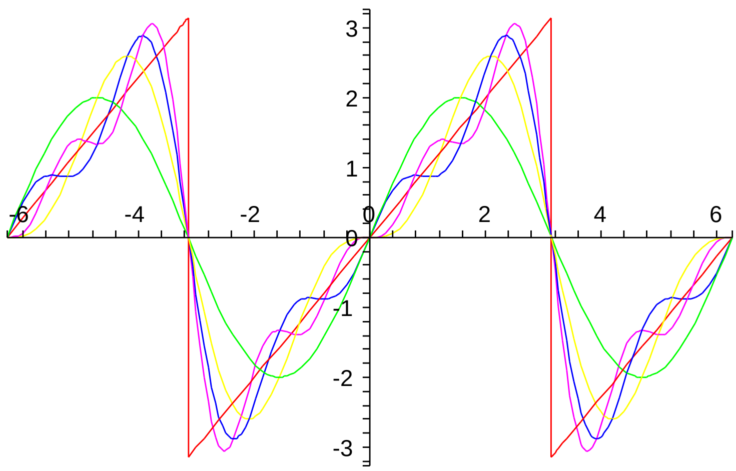

Abbildung 3: (b) Die Funktion f und die Fourierpolynome $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{F}_3$ und $\hat{F}_4$

Aufgabe 5: (mündlich)

Gegeben sie das Polynom $p(x) = 3 - 2x + 4x^2 - x^3$.

(a) Bestimmen Sie die Bezier-Darstellung für $p(x)$ im Intervall $[0,2]$.

(b) Verwenden Sie den Algorithmus von de Casteljau zur Berechnung von $p(\frac{2}{3})$ und $p(\frac{4}{3})$ und skizzieren Sie den Graph des Polynoms $p(x)$ für $x \in [0,2]$ sowie das Bezier-Polygon in einem Schaubild.

Lösung:

(a) Bezier-Darstellung von $p(x) = 3 - 2x + 4x^2 - x^3$ im Intervall $[0,2]$: $p(x) = \sum_{k=0}^{3} \beta_k b_{k3}\left(\frac{x}{2}\right)$ mit

$$\begin{aligned}
b_{kn}(x) &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k} \\
b_{03}\left(\frac{x}{2}\right) &= \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 \\
b_{13}\left(\frac{x}{2}\right) &= 3\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3 \\
b_{23}\left(\frac{x}{2}\right) &= 3\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}x^3 \\
b_{33}\left(\frac{x}{2}\right) &= \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}x^3
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert für $p(x) = 3 - 2x + 4x^2 - x^3 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{3} \beta_k b_{k3}\left(\frac{x}{2}\right)$ ein LGS für die β_k's:

$$\begin{array}{cccc|c}
\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\
\hline
1 & & & & 3 \\
-\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & & & -2 \\
\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & & 4 \\
-\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & -1
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
\beta_0 = 3 \\
\beta_1 = \frac{5}{3} \\
\beta_2 = \frac{17}{3} \\
\beta_3 = 7
\end{array}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} \beta_i b_{i3}\left(\frac{x}{2}\right) = 3b_{03}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{3}b_{13}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{17}{3}b_{23}\left(\frac{x}{2}\right) + 7b_{33}\left(\frac{x}{2}\right)$$

(b) Der Algorithmus von de Casteljau dient zur Auswertung eines algebraischen Polynoms $p(x)$ an einer Stelle $x = \xi$ in Bezier-Darstellung, d.h. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k b_{k,n}(x)$, mit Hilfe der Rekursion:

$$\begin{aligned}
\beta_\nu^{(0)} &= \beta_\nu,\ \nu = 0, \ldots, n \\
\beta_\nu^{(k)} &= (1-\xi)\beta_\nu^{(k-1)} + \xi\beta_{\nu+1}^{(k-1)},\ \nu = 0, \ldots, n-k,\ k = 1, \ldots, n \\
\beta_0^{(n)} &= p(\xi)
\end{aligned}$$

Wir benötigen nun hier den Algorithmus von de Casteljau für das Intervall $[0,2]$, d.h. für die Bezier-Darstellung des Polynoms $p(x)$ in $[0,2]$:

$$\begin{aligned}
\beta_\nu^{(0)} &= \beta_\nu,\ \nu = 0, \ldots, n \\
\beta_\nu^{(k)} &= \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\beta_\nu^{(k-1)} + \frac{\xi}{2}\beta_{\nu+1}^{(k-1)},\ \nu = 0, \ldots, n-k,\ k = 1, \ldots, n \\
\beta_0^{(n)} &= p(\xi)
\end{aligned}$$

Schema für $p\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{array}{l|lll}
\beta_0^{(0)} = \beta_0 = 3 & & & \\
 & \beta_0^{(1)} = (1 - \frac{\frac{2}{3}}{2})\beta_0^{(0)} + \frac{\frac{2}{3}}{2}\beta_1^{(0)} = \frac{23}{9} & & \\
\beta_1^{(0)} = \beta_1 = \frac{5}{3} & & \beta_0^{(2)} = \frac{73}{27} & \\
 & \beta_1^{(1)} = 3 & & \beta_0^{(3)} = \frac{85}{27} = p\left(\frac{2}{3}\right) \\
\beta_2^{(0)} = \beta_2 = \frac{17}{3} & & \beta_1^{(2)} = \frac{109}{27} & \\
 & \beta_2^{(1)} = \frac{55}{9} & & \\
\beta_3^{(0)} = \beta_3 = 7 & & &
\end{array}$$

Schema für $p\left(\frac{4}{3}\right)$:

$$
\begin{array}{l|lll}
\beta_0^{(0)} = \beta_0 = 3 & & & \\
 & \beta_0^{(1)} = (1-\frac{\frac{4}{3}}{2})\beta_0^{(0)} + \frac{\frac{4}{3}}{2}\beta_1^{(0)} = \frac{19}{9} & & \\
\beta_1^{(0)} = \beta_1 = \frac{5}{3} & & \beta_0^{(2)} = \frac{97}{27} & \\
 & \beta_1^{(1)} = \frac{13}{3} & & \beta_0^{(3)} = \frac{137}{27} = p\left(\frac{4}{3}\right) \\
\beta_2^{(0)} = \beta_2 = \frac{17}{3} & & \beta_1^{(2)} = \frac{157}{27} & \\
 & \beta_2^{(1)} = \frac{59}{9} & & \\
\beta_3^{(0)} = \beta_3 = 7 & & &
\end{array}
$$

(c) Für die Darstellung des Bezier-Polygons benötigen wir noch die Bezier-Punkte, die sich allgemein für das Intervall $[0,2]$ ergeben zu

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{n} \\ \beta_1^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{n} \\ \beta_2^{(0)} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \frac{2n}{n} \\ \beta_n^{(0)} \end{pmatrix}
$$

$$
\text{Hier: } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}
$$

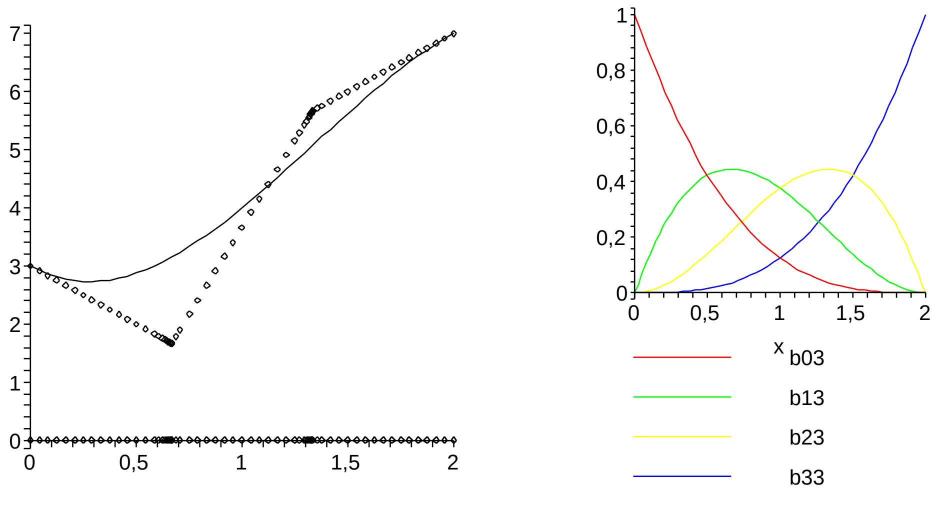

Abbildung 4: links: Polynom p und Bezier-Polygon für $x \in [0,2]$, rechts: Bernstein-Grundpolynome b_{k4}

Aufgabe 6: (mündlich)

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Bernstein-Grundpolynome $b_{\nu,n}(t) = \begin{pmatrix} n \\ \nu \end{pmatrix} t^\nu (1-t)^{n-\nu}, \nu = 0, \ldots, n$ vom Grad n:

(a) Die Rekursionsformel

$$
b_{\nu,n}(t) = (1-t)b_{\nu,n-1}(t) + t b_{\nu-1,n-1}(t), \quad 0 \le \nu \le n \; b_{n,n-1}(t) = b_{-1,n-1}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}
$$

Hinweis: Es gilt $\begin{pmatrix} n \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{pmatrix}$.

(b) $b_{\nu,n}$ besitzt in $[0,1]$ genau ein Maximum für $t = \frac{\nu}{n}$.

Lösung:

(a) Wir zeigen zuerst die Aussage für $\nu = 0$ und $\nu = n-1$ und dann für $\nu = n$ (RF=Rekursionsformel, Def=Definition der Bernstein-Grundpolynome):

$$\begin{aligned}
\nu = 0: \; b_{0,n}(t) &\overset{\text{RF}}{=} (1-t)b_{0,n-1}(t) + tb_{-1,n-1}(t) = (1-t)b_{0,n-1}(t) + t \cdot 0 \\
&= (1-t)\left(\begin{array}{c} n-1 \\ 0 \end{array}\right) t^0 (1-t)^{n-1-0} = (1-t)^n = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) t^0(1-t)^n \\
&\overset{\text{Def}}{=} b_{0,n}(t) \\
\nu = n: \; b_{n,n}(t) &\overset{\text{RF}}{=} (1-t)b_{n,n-1}(t) + tb_{n-1,n-1}(t) = (1-t)\cdot 0 + tb_{n-1,n-1}(t) \\
&= t\left(\begin{array}{c} n-1 \\ n-1 \end{array}\right) t^{n-1}(1-t)^{n-1-n+1} = t^n = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) t^n (1-t)^{n-n} \overset{\text{Def}}{=} b_{n,n}(t) \\
\nu = 1, \cdots, n-1: \; b_{\nu,n}(t) &= \left(\begin{array}{c} n \\ \nu \end{array}\right) t^\nu (1-t)^{n-\nu} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ \nu \end{array}\right) t^\nu (1-t)^{n-\nu} + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ \nu-1 \end{array}\right) t^\nu (1-t)^{n-\nu} \\
&= (1-t)\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \nu \end{array}\right) t^\nu (1-t)^{n-1-\nu} + t\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \nu-1 \end{array}\right) t^{\nu-1}(1-t)^{n-\nu} \\
&= (1-t)b_{\nu,n-1}(t) + tb_{\nu-1,n-1}(t) \qquad \square
\end{aligned}$$

(b) Um das Maximum einer Funktion zu berechnen, benötigen wir die erste Ableitung, die wir dann gleich null setzen müssen:

$$\begin{aligned}
b_{\nu,n} &= \left(\begin{array}{c} n \\ \nu \end{array}\right) t^\nu (1-t)^{n-\nu} \\
\frac{d}{dt} b_{\nu,n} &= \left(\begin{array}{c} n \\ \nu \end{array}\right) \left[\nu t^{\nu-1}(1-t)^{n-\nu} - t^\nu (n-\nu)(1-t)^{n-\nu-1}\right] \\
&= \left(\begin{array}{c} n \\ \nu \end{array}\right) t^{\nu-1}(1-t)^{n-\nu-1}\left[\nu(1-t) - t(n-\nu)\right] \overset{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow t = 0, \; t = 1 \text{ oder } \nu - \nu t - tn + t\nu = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\nu}{n}
\end{aligned}$$

Da die Funktion $b_{\nu,n}$ in $[0,1]$ positiv ist und an den Eckpunkte 0 und 1 jeweils den Wert null annimmt, muss das Maximum an der Stelle $\frac{\nu}{n}$ liegen.

Aufgabe 7: (mündlich)

Gegeben sei eine positive Gewichtsfunktion $\omega(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ sowie die dazugehörigen Gauß-Quadraturformel mit den Knoten $-1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_s \leq 1$. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Die Gauß-Quadraturformel ist exakt für Polynome vom Grad $2s-1$.

(b) Alle Gewichte der Gauß-Quadraturformel sind positiv. Betrachten Sie hierzu die Funktion $q(x) = \left(\frac{p_s(x)}{x-x_i}\right)^2$, wobei p_i die zu $\omega(x)$ gehörigen Orthogonalpolynome sind.

Lösung: Die Gauß-Quadraturformel mit Knoten $-1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_s \leq 1$ und positiven Gewichtsfunktionen $\omega(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ hat die Gestalt

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{s} \omega_j f(x_j) + Rf,$$

wobei die Knoten x_j für $j = 1, \ldots, s$ die Nullstellen des Orthogonalpolynoms $p_s(x)$ bzgl. des gewichteten Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle_\omega := \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)g(x)dx$$

sind. Die Gewichte ω_j sind dabei interpolatorisch, d.h.

$$\omega_j := \int_{-1}^{1} \omega(x) l_j(x) dx.$$

(a) Zu zeigen. Die Gauß-Quadraturformel ist exakt für Polynome vom Grad $2s-1$.

1. Schritt: Exaktheitsgrad $s-1$

Sei $p(x) \in \mathcal{P}_{s-1}$, dann liefert die Lagrange-Darstellung $p(x) = \sum_{j=1}^{s} p(x_j) l_j(x)$ und somit

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)p(x)dx = \int_{-1}^{1} \omega(x) \sum_{j=1}^{s} p(x_j) l_j(x) dx = \sum_{j=1}^{s} p(x_j) \underbrace{\int_{-1}^{1} \omega(x) l_j(x) dx}_{=\omega_j} = \sum_{j=1}^{s} p(x_j)\omega_j$$

$\Rightarrow Rf = 0 \Rightarrow$ Exaktheitsgrad $s-1$

2. Schritt: Exaktheitsgrad $2s-1$

Sei $p(x) \in \mathcal{P}_{2s-1}$, dann existiert ein $r(x), s(x) \in \mathcal{P}_{s-1}$ und dem Orthogonalpolynom p_s mit $p(x) = s(x)p_s(x) + r(x)$ (Euklidischer Algorithmus) und es folgt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \omega(x)p(x)dx &= \underbrace{\int_{-1}^{1} \omega(x)s(x)p_s(x)dx}_{=0,\, p_s(x) \text{Orthogonalpolynom}} + \int_{-1}^{1} \omega(x)r(x) \overset{r\in\mathcal{P}_{s-1}}{=} \sum_{j=1}^{s} \omega_j r(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{s} \omega_j [s(x_j) \underbrace{p_s(x_j)}_{=0\ (x_j \text{ NS})} + r(x_j)] = \sum_{j=1}^{s} \omega_j p(x_j)\end{aligned}$$

$\Rightarrow Rf = 0 \Rightarrow$ Exaktheitsgrad $2s-1$ $\square$

(b) Zu zeigen: Die Gewichte der Gauß-Quadraturformel sind positiv.

Betrachte

$$q(x) = \left(\frac{p_s(x)}{x - x_i}\right)^2 \in \mathcal{P}_{2s-2}, \quad i \in \{1, \dots, s\} \text{ beliebig, aber fest.}$$

Es gilt $q(x_j) = 0$ für $j \neq i$ und $q(x_i) = (p_s'(x_i))^2$, da

$$\begin{aligned} p_s(x) &= \prod_{j=1}^{s} (x - x_j) = (x - x_j) \cdot \left[\prod_{j=1, j\neq i}^{s} (x - x_j)\right] \\ p_s'(x) &= \prod_{j=1, j\neq i}^{s} (x - x_j) + (x - x_i) \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{s} (x - x_j)\right)' \\ p_s'(x_i) &= \prod_{j=1, j\neq i}^{s} (x_i - x_j) \\ p_s'(x_i)^2 &= \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{s} (x_i - x_j)\right)^2 = q(x_i)\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)q(x)dx = \sum_{j=1}^{s} \omega_j q(x_j) = \omega_j q(x_i) = \omega_i \left(p_s'(x_i)\right)^2$$

$$\Rightarrow \omega_i = \frac{1}{(p_s'(x_i))^2} \int_{-1}^{1} \omega(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1} \omega(x) \left(\frac{p_s(x)}{(x - x_i)p_s'(x_i)}\right)^2 dx > 0$$