**UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)**
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Scherer
Dipl.-Math. Heike Stoll

# Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen
# SS 2005

## 6. Übungsblatt — 01. Juli 2005

**Aufgabe 1:** (schriftlich zu bearbeiten) (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die ersten drei Zeilen des Romberg-Schemas zur Berechnung des Integrals $J = \int\limits_0^2 3^{3x-1}dx = \frac{728}{9\ln 3}$ aus Aufgabe 3 vom 5. Übungsblatt.

(b) Gegeben sei das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ und die Knoten $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = 1$. Bestimmen Sie dazu eine Quadraturformel mit Exaktheitsgrad 2.

**Aufgabe 2:** (schriftlich zu bearbeiten) (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für das Tschebyscheff-Polynom $T_4(x)$ die Bezier-Darstellung.

(b) Verwenden Sie den Algorithmus von de Casteljau zur Berechnung von $T_4\left(\frac{1}{4}\right)$, $T_4\left(\frac{1}{2}\right)$ und $T_4\left(\frac{3}{4}\right)$.

(c) Skizzieren Sie $T_4(x)$, die benötigten Bernstein-Grundpolynome und das Bezier-Polygon jeweils für $x \in [0, 1]$.

**Aufgabe 3:** (schriftlich zu bearbeiten) (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische reelle gerade (bzw. ungerade) Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ (bzw. $f(x) = -f(-x)$) für alle $x$, so ist $\beta_k$=0 für alle $k \in \mathbb{N}$ (bzw. $\alpha_k = 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots$) und

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt,\ \alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos ktdt,\ \left(\text{bzw. } \beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin ktdt\right) \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu der $2\pi$-periodischen Funktion $f$, welche auf $[0, 2\pi)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ -1 & \pi \le x < 2\pi \end{cases} .$$

(c) Skizzieren Sie $f, \hat{F}_1, \hat{F}_3$ und $\hat{F}_5$, wobei $\hat{F}_i$ das zu $f$ gehörige Fourierpolynom $i$-ten Grades ist.

**Aufgabe 4:** (mündlich)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu der $2\pi$-periodischen Funktion $f$, welche auf $[-\pi, \pi)$ gegeben ist durch $f(x) = x$.

(b) Skizzieren Sie $f, \hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{F}_3$ und $\hat{F}_4$, wobei $\hat{F}_i$ das zu $f$ gehörige Fourierpolynom $i$-ten Grades ist.

**Aufgabe 5:** (mündlich)

Gegeben sei das Polynom $p(x) = 3 - 2x + 4x^2 - x^3$.

(a) Bestimmen Sie die Bezier-Darstellung für $p(x)$ im Intervall $[0, 2]$.

(b) Verwenden Sie den Algorithmus von de Casteljau zur Berechnung von $p(\frac{2}{3})$ und $p(\frac{4}{3})$. Skizzieren Sie den Graph des Polynoms $p(x)$ für $x \in [0, 2]$ sowie das Bezier-Polygon in einem Schaubild.

**Aufgabe 6:** (mündlich)

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Bernstein-Grundpolynome $b_{\nu,n}(t) = \left( \begin{array}{c} n \\ \nu \end{array} \right) t^\nu (1-t)^{n-\nu}, \nu = 0, \ldots, n$ vom Grad $n$:

(a) Die Rekursionsformel

$$b_{\nu,n}(t) = (1-t) b_{\nu,n-1}(t) + t b_{\nu-1,n-1}(t), \quad 0 \leq \nu \leq n \; b_{n,n-1}(t) = b_{-1,n-1}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Es gilt $\left( \begin{array}{c} n \\ \nu \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} n-1 \\ \nu \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} n-1 \\ \nu-1 \end{array} \right)$.

(b) $b_{\nu,n}$ besitzt in $[0, 1]$ genau ein Maximum für $t = \frac{\nu}{n}$.

**Aufgabe 7:** (mündlich)

Gegeben sei eine nicht negative Gewichtsfunktion $\omega(x) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sowie die dazugehörigen Gauß-Quadraturformel mit den Knoten $-1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_1 \leq 1$. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Die Gauß-Quadraturformel ist exakt für Polynome vom Grad $2s - 1$.

(b) Alle Gewichte der Gauß-Quadraturformel sind positiv. Betrachten Sie hierzu die Funktion $q(x) = \left( \frac{p_s(x)}{x - x_i} \right)^2$, wobei $p_i$ die zu $\omega(x)$ gehörigen Orthogonalpolynome sind.

**Abgabe** der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 14. Juli 2005, 14:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik für Informatiker“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30) gegenüber von Zimmer 112.
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name, Matrikelnummer und Teilnehmernummer und heften Sie die Blätter zusammen.
Die **korrigierten Übungsblätter** können dann ab Dienstag, 19. Juli abgeholt werden.

Die Scheinklausur zur Vorlesung
**Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen (SS 2005)**
findet statt am

**Donnerstag, den 21. Juli 2005, 14:00 Uhr – 16:00 Uhr**

Bitte beachten Sie:

- Zur Klausur ist zugelassen, wer **20** Punkte aus den Übungsblättern des Sommersemesters 2005 erreicht hat. Punkte aus Übungsblättern vorheriger Semester werden nicht anerkannt.
- Eine Anmeldung zur Klausur ist **nicht** erforderlich.
- Hilfsmittel zur Klausur (Taschenrechner, Bücher, Skript u.ä.) sind **nicht** zugelassen.
- Die Hörsaalverteilung wird etwa eine Woche vor der Klausur bekanntgegeben. Aushang beim Sekretariat des Instituts für Praktische Mathematik (Zi. 116, M athematik-Gebäude) und unter:
`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/prakmath/lehre/numinf2005s/de`
- Bitte bringen Sie zur Klausur Ihren **Studentenausweis** mit.
- Stoff der Klausur ist der Vorlesungsstoff des Sommersemesters 2005.