UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Scherer
Dipl.-Math. Heike Stoll

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen – SS 2005

Lösung zum 5. Übungsblatt — 17. Juni 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten) (2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -2|x+1| + 3$ und die Knoten $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0$.

(a) Interpolieren Sie die Funktion f durch einen kubischen Spline s, der den Randbedinungen $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$ genügt.

(b) Berechnen Sie den Interpolationsfehler zu f in $[-2, 0]$ bezüglich der Maximum-Norm, d.h. $\|f - s\|_\infty$ und skizzieren Sie $f(x)$ und $s(x)$.

Lösung:

(a) Ansatz für einen kubischen Spline mit Knoten $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0$:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 & -2 \le x \le -1 \\ s_1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 & -1 \le x \le 0 \end{cases} .$$

Damit erhalten wir folgende Bedingungen zur Bestimmung der Koeffizienten a_i, b_i, $i = 0, \dots, 3$:

$$\begin{array}{l} \text{Eigenschaften des kubischen Splines} \left\{ \begin{array}{ll} (1) & s_0(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \stackrel{!}{=} b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = s_1(-1) \\ (2) & s_0'(-1) = a_1 - 2a_2 + 3a_3 \stackrel{!}{=} b_1 - 2b_2 + 3b_3 = s_1'(-1) \\ (3) & s_0''(-1) = 2a_2 - 6a_3 \stackrel{!}{=} 2b_2 - 6b_3 = s_1''(-1) \end{array} \right. \\ \text{Interpolationsbedingungen} \left\{ \begin{array}{ll} (4) & s(-2) = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \stackrel{!}{=} f(-2) = -2|-2+1| + 3 = 1 \\ (5) & s(-1) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \stackrel{!}{=} f(-1) = -2|-1+1| + 3 = 3 \\ (6) & s(0) = b_0 \stackrel{!}{=} f(0) = -2|0+1| + 3 = 1 \Rightarrow \boxed{b_0 = 1} \end{array} \right. \\ \text{Randbedingungen} \left\{ \begin{array}{ll} (7) & s''(-2) = 2a_2 - 12a_3 \stackrel{!}{=} 0 \\ (8) & s''(0) = 2b_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{b_2 = 0} \end{array} \right. \end{array}$$

Mit

$$(5) \quad b_1 = 1 - b_3 - 3 = -2 - b_3$$

erhalten wir aus (1), (2), (3), (4) und (7) ein LGS für a_0, a_1, a_2, a_3, b_3:

$$\begin{array}{ll} (1) & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1 + 2 + b_3 + 0 - b_3 = 3 \\ (2) & a_1 - 2a_2 + 3a_3 = -2 - b_3 + 3b_3 = -2 + 2b_3 \\ (3) & 2a_3 - 6a_3 = -6b_3 \\ (4) & a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = 1 \\ (7) & 2a_2 - 12a_3 = 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|rrrrr|r}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_3 & \\
\hline
(1) & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
(4) & 1 & -2 & 4 & -8 & 0 & 1 \\
(2) & & 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\
(3) & & & 1 & -3 & 3 & 0 \\
(7) & & & 1 & -6 & 0 & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rrrrr|r}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_3 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
0 & -1 & 3 & -7 & 0 & -2 \\
 & 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\
 & & 1 & -3 & 3 & 0 \\
 & & 1 & -6 & 0 & 0
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_3 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
 & -1 & 3 & -7 & 0 & -2 \\
 & & 1 & -4 & -2 & -4 \\
 & & & 1 & 5 & 4 \\
 & & & -2 & 2 & 4
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rrrrr|r}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_3 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
 & -1 & 3 & -7 & 0 & -2 \\
 & & 1 & -4 & -2 & -4 \\
 & & & 1 & 5 & 4 \\
 & & & & 12 & 12
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \boxed{b_3 = 1} \\
&a_3 = (4 - 5 \cdot 1) = -1 \Rightarrow \boxed{a_3 = -1} \\
&a_2 = (-4 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)) = -6 \Rightarrow \boxed{a_2 = -6} \\
&a_1 = (2 - 7 \cdot (-1) + 3 \cdot (-6)) = -9 \Rightarrow \boxed{a_1 = -9} \\
&a_0 = (3 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-6) + 1 \cdot (-9)) = -1 \Rightarrow \boxed{a_0 = -1} \\
&\text{und mit (5)} \Rightarrow \boxed{b_1 = -3}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir den kubischen Spline:

$$
s(x) = \begin{cases} -1 - 9x - 6x^2 - x^3 & -2 \le x \le -1 \\ 1 - 3x + x^3 & -1 \le x \le 0 \end{cases}
$$

(b) f und s sind achsensymmetrisch zu $x = -1$, da mit der Entwicklung von s_0, s_1 um $\alpha = -1$ mit dem vollständigen Hornerschema folgt

$$
\begin{aligned}
s_0(x) &= 3 - 3(x+1)^2 - (x+1)^3 \\
s_1(x) &= 3 - 3(x+1)^2 + (x+1)^3
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad s_0(-1+\alpha) = s_1(-1-\alpha)
$$

und $f(-1+\alpha) = f(-1-\alpha)$. Damit gilt

$$
\|f - s\|_\infty = \max_{x \in [-2,0]} |f(x) - s(x)| = \max_{x \in [-1,0]} |f(x) - s(x)| = \max_{x \in [-1,0]} |f(x) - s_1(x)|
$$

Es genügt also das Intervall $[-1, 0]$ zu betrachten. Es gilt

$$
\begin{aligned}
h(x) := f(x) - s_1(x) &= -2(x+1) + 3 - (3 - 3(x+1)^2 + (x+1)^3) \\
&= -2(x+1) + 3(x+1)^2 - (x+1)^3 = (x+1)(-2 + 3(x+1) - (x+1)^2) \quad \text{für } x \in [-1, 0]
\end{aligned}
$$

Aus der Interpolationsbedingung folgt

$$
h(-1) = f(-1) - s_1(-1) = 0 = f(0) - s_1(0) = h(0)
$$

und um das Maximum von h zu finden, müssen wir die Ableitung gleich null setzen:

$$
h'(x) = -2 + 6(x+1) - 3(x+1)^2 \stackrel{!}{=} 0
$$

Mit der Substitution $z = x + 1$ folgt dann

$$
\begin{aligned}
&h'(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad h'(z-1) \stackrel{!}{=} -2 + 6z - 3z^2 = -3(z-1)^2 + 1 = 0 \\
&z_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_{1,2} = z_{1,2} - 1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \pm 0.577 \text{ und } x \in [-1, 0] \Rightarrow x = -0.577
\end{aligned}
$$

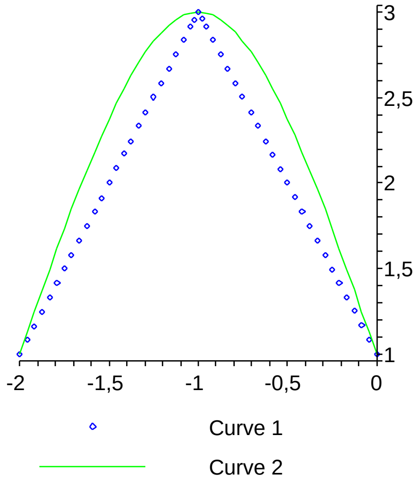


Abbildung 1: (b) Curve 1 $= f(x) = -2|x+1|+3$, Curve 2 = Spline s

Es gilt nun

$$\max_{x\in[-1,0]} |h(x)| = |h(-0.577)| = \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0.384900179$$

und damit

$$\|f-s\|_\infty \approx 0.3849.$$

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{24}{2-x}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ und $x_0 = -4, x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_3 vom Grad 3 zu f in Newton- und Lagrange-Darstellung.

(b) Skizzieren Sie $f(x)$ und $p_3(x)$, sowie die benötigten Lagrange-Grundfunktionen im Intervall $[x_0, x_3]$.

(c) Durch Hinzunahme des Knotens $x_4 = 1$ soll f in $[-4, 1]$ interpoliert werden. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom p_4 vom Grad 4 mit möglichst geringem Aufwand.

Lösung:

(a) Newton-Gestalt; dividierte Differenzen:

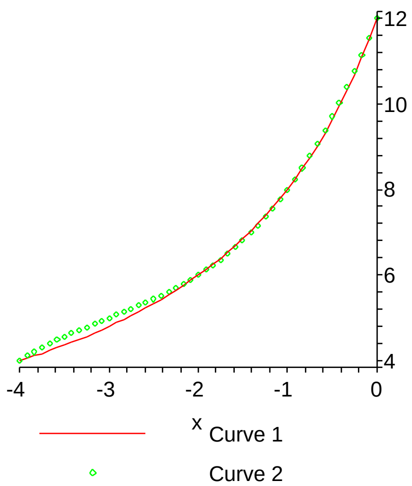
$$\begin{array}{c|llll}
x & f(x) & & & \\
x_0=-4 & f(x_0)=[x_0]=4=\alpha_0 & & & \\
 & & \frac{6-4}{-2-(-4)}=1=\alpha_1 & & \\
x_1=-2 & f(x_1)=[x_1]=6 & & \frac{2-1}{-1-(-4)}=\frac{1}{3}=\alpha_2 & \\
 & & \frac{8-6}{-1-(-2)}=2 & & \frac{1-\frac{1}{3}}{0-(-4)}=\frac{1}{6}=\alpha_3 \\
x_2=-1 & f(x_2)=[x_2]=8 & & \frac{4-2}{0-(-2)}=1 & \\
 & & \frac{12-8}{0-(-1)}=4 & & \\
x_3=0 & f(x_3)=[x_3]=12 & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{i=0}^{3} \alpha_i\omega_i(x) = 4\cdot 1 + 1\cdot(x-x_0) + \frac{1}{3}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{1}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 4 + (x+4) + \frac{1}{3}(x+4)(x+2) + \frac{1}{6}(x+4)(x+2)(x+1) \\
&= \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{16}{3}x + 12
\end{aligned}$$

Lagrange-Darstellung:

$$\text{Lagrangepolynome: } l_j(x) = \prod_{k=0;k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}, \text{ hier } n=3$$

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x+2)(x+1)x}{(-4+2)(-4+1)(-4)} = -\frac{1}{24}(x+2)(x+1)x = -\frac{1}{24}(x^3+3x^2+2x)\\
l_1(x) &= \frac{(x+4)(x+1)x}{(-2+4)(-2+1)(-2)} = \frac{1}{4}(x+4)(x+1)x = \frac{1}{4}(x^3+5x^2+4x)\\
l_2(x) &= \frac{(x+4)(x+2)x}{(-1+4)(-1+2)(-1)} = -\frac{1}{3}(x+4)(x+2)x = -\frac{1}{3}(x^3+6x^2+8x)\\
l_3(x) &= \frac{(x+4)(x+2)(x+1)}{(4)(2)(1)} = \frac{1}{8}(x+4)(x+2)(x+1) = \frac{1}{8}(x^3+7x^2+14x+8)\\
\Rightarrow p_3(x) &= \sum_{i=0}^{3} f(x_i)l_i(x) = 4l_0(x)+6l_1(x)+8l_2(x)+12l_3(x) = \frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{16}{3}x+12
\end{aligned}$$



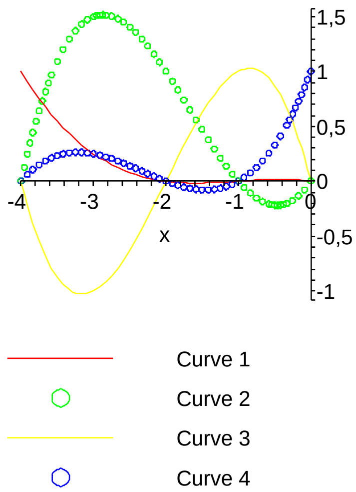


Abbildung 2: (b) linke Abbildung: Curve 1 = f, Curve 2 = p_3; rechte Abbildung: Lagrange-Grundfunktionen: Curve $i = l_{i-1}$, $i = 1,2,3,4$

(c) Verwende Newton-Schema aus (a) und ergänze eine weitere Zeile:

$$\begin{array}{c|lllll}
x & f(x) & & & & \\
-4 & [x_0]=4=\alpha_0 & & & & \\
 & & 1=\alpha_1 & & & \\
-2 & [x_1]=6 & & \frac{1}{3}=\alpha_2 & & \\
 & & 2 & & \frac{1}{6}=\alpha_3 & \\
-1 & [x_2]=8 & & 1 & & \frac{1-\frac{1}{6}}{1-(-4)}=\frac{1}{6}=\alpha_4 \\
 & & 4 & & \frac{4-1}{1-(-2)}=1 & \\
0 & [x_3]=12 & & \frac{12-4}{1-(-1)}=4 & & \\
 & & \frac{24-12}{1-0}=12 & & & \\
1 & [x_4]=24 & & & &
\end{array}$$

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i\omega_i(x) = p_3(x) + \frac{1}{6}(x+4)(x+2)(x+1)x = \frac{1}{6}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{23}{6}x^2+\frac{20}{3}x+12$$

Aufgabe 3: (schriftlich zu bearbeiten) (3 Punkte)

Gegeben sei

$$J := \int_0^2 3^{3x-1}dx = \frac{728}{9\,\ln 3} = 73.62823965$$

(a) Nähern Sie J mit der Trapez-, Mittelpunkt- und Kepler-Regel sowie mit den dazugehörigen zusammengesetzten Formeln zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ an.

(b) Wenden Sie für jede dieser Näherungen die bekannten Fehlerabschätzungen an und vergleichen Sie diese mit dem wirklichen Fehler.

(c) Wieviele Funktionsauswertungen des Integranden sind erforderlich, um mit der zusammengesetzten Trapez-, Mittelpunkt- und Kepler-Regel zur Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ das Integral J mit einer Genauigkeit von 10^{-4} zu berechnen?

Lösung:

(a) Mit $h = \frac{b-a}{n}$ für die Trapezregel (TR) und Mittelpunktregel (MR) und $2h = \frac{b-a}{n}$ für die Keplerregel (KR) und ihre zugehörgien zusammengesetzten (zus.) Formeln gilt allgemein:

$$\text{TR} \quad \int_a^b f(x)dx = J_T + Rf_T = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}f''(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

$$\text{zus. TR} \quad \int_a^b f(x)dx = J_T^{(n)} + Rf_T^{(n)} = h\left\{\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\,h) + \frac{1}{2}f(b)\right\} - \frac{(b-a)^3}{12}\frac{1}{n^2}f''(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

$$\text{MR} \quad \int_a^b f(x)dx = J_M + Rf_M = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

$$\text{zus. MR} \quad \int_a^b f(x)dx = J_M^{(n)} + Rf_M^{(n)} = h\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{2i-1}{2}h\right) + \frac{(b-a)^3}{24}\frac{1}{n^2}f''(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

$$\text{KR} \quad \int_a^b f(x)dx = J_K + Rf_K = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

$$\text{zus. KR} \quad \int_a^b f(x)dx = J_K^{(n)} + Rf_K^{(n)} = \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih) + f(b)\right\}$$
$$- \frac{(b-a)^5}{2880}\frac{1}{n^4}f^{(4)}(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

Hier: $h = \frac{1}{3}, b = 2, a = 0$ Trapez- und Mittelpunktregel: $n = 6$ und Keplerregel $n = 3$.

$$J_T = \frac{2-0}{2}(f(0)+f(2)) = \frac{730}{3} = 243,\bar{3}$$

$$J_T^{(6)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{2}f(2)\right\} = \frac{728}{9} = 80,\bar{8}$$

$$J_M = (2-0)f(1) = 18$$

$$J_M^{(6)} = \frac{1}{3}\left\{f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{3}{6}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right) + f\left(\frac{7}{6}\right) + f\left(\frac{9}{6}\right) + f\left(\frac{11}{6}\right)\right\} = \frac{364\sqrt{3}}{9} = 70.05183266$$

$$J_K = \frac{2-0}{6}\left(f(0) + 4f(1) + f(2)\right) = \frac{838}{9} = 93,\bar{1}$$

$$J_K^{(3)} = \frac{\frac{1}{3}}{3}\left\{f(0) + 4\left[f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{3}\right)\right] + 2\left[f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right)\right] + f(2)\right\} = \frac{2002}{27} = 74.\overline{148}$$

(b) Die k-te Ableitung von f ergibt sich zu $f^{(k)}(x) = 3^{3x+k-1}(\ln(3))^k$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Wahrer Fehler} &\leq \text{Abschätzung des Fehlers} \\
|J - J_T| = 169.7050936 &\leq Rf_T = \max_{x\in[0,2]} \frac{2^3}{12} 3^{3x+1}(\ln(3))^2 = 1759.731587 \\
|J - J_T^{(6)}| = 7.26064294 &\leq Rf_T^{(6)} = \max_{x\in[0,2]} \frac{2^3}{12}\frac{1}{6^2} 3^{3x+1}(\ln(3))^2 = 48.88143296 \\
|J - J_M| = 55.62823965 &\leq Rf_M = \max_{x\in[0,2]} \frac{2^3}{24} 3^{3x+1}(\ln(3))^2 = 879.8657933 \\
|J - J_M^{(6)}| = 3.57640698 &\leq Rf_M^{(6)} = \max_{x\in[0,2]} \frac{2^3}{24}\frac{1}{6^2} 3^{3x+1}(\ln(3))^2 = 24.44071648 \\
|J - J_K| = 19.48287146 &\leq Rf_K = \max_{x\in[0,2]} \frac{2^5}{2880} 3^{3x+3}(\ln(3))^4 = 318.5859316 \\
|J - J_K^{(3)}| = 0.51990850 &\leq Rf_K^{(3)} = \max_{x\in[0,2]} \frac{2^5}{2880}\frac{1}{3^4} 3^{3x+3}(\ln(3))^4 = 3.933159649
\end{aligned}$$

(c) Berechnung von $n = \frac{1}{h}$ der zusammengesetzten T-, M- und K-Regel für die geforderte Genauigkeit von 10^{-4}:

$$\begin{aligned}
|Rf_T^{(n)}| &\leq \max_{x\in[0,2]} \frac{(b-a)^3}{12}\frac{1}{n^2} f''(x) = \frac{8}{12} 3^7(\ln(3))^2 \frac{1}{n^2} \overset{!}{\leq} 10^{-4} \\
|Rf_M^{(n)}| &\leq \max_{x\in[0,2]} \frac{(b-a)^3}{24}\frac{1}{n^2} f''(x) = \frac{8}{24} 3^7(\ln(3))^2 \frac{1}{n^2} \overset{!}{\leq} 10^{-4} \\
|Rf_K^{(n)}| &\leq \max_{x\in[0,2]} \frac{(b-a)^5}{2880}\frac{1}{n^4} f^{(4)}(x) = \frac{2^5}{2880} 3^9(\ln(3))^4 \frac{1}{n^4} \overset{!}{\leq} 10^{-4} \\
T &: 1759.731585 \leq 10^{-4}\cdot n^2 \Rightarrow n \geq 4194.915476 \Rightarrow n = 4195 \\
M &: 879.8657924 \leq 10^{-4}\cdot n^2 \Rightarrow n \geq 2966.253179 \Rightarrow n = 2967 \\
K &: 318.5859312 \leq 10^{-4}\cdot n^4 \Rightarrow n \geq 42.2\overline{480} \Rightarrow n = 43
\end{aligned}$$

Da für die zusammengesetzen Trapez- und Mittelpunktregel $\left(h = \frac{b-a}{n}\right)$ und die zusammengesetzte Keplerregel $\left(2h = \frac{b-a}{n}\right)$ allgemein gilt

$$\begin{aligned}
\text{zus. TR} \quad J_T^{(n)} &= h\left\{\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}f(b)\right\} \\
\text{zus. MR} \quad J_M^{(n)} &= h\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{2i-1}{2}h\right) \\
\text{zus. KR} \quad J_K^{(n)} &= \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih) + f(b)\right\}
\end{aligned}$$

erhalten wir $1 + (n-1) + 1 = n+1$; n und $1 + n + (n-1) + 1 = 2n+1$ Funktionsauswertungen für die Trapez-, Mittelpunkt- und Keplerregel. Damit folgt hier, dass wir $n+1 = 4196$ Funktionsauswertungen für die Trapez-, $n = 2967$ Funktionsauswertungen für die Mittelpunkt- und $2n+1 = 2\cdot 43+1 = 87$ Funktionsauswertungen für die Keplerregel benötigen.

Aufgabe 4: (mündlich)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -2|x+1| + 3$ und die Knoten $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0$ aus Aufgabe 1.

(a) Interpolieren Sie die Funktion f durch ein Polynom p, das den zusätzlichen Bedingungen $p'(x_0) = f'(x_0)$ und $p'(x_2) = f'(x_2)$ genügt.

(b) Berechnen Sie den Interpolationsfehler zu f in $[-2, 0]$ bezüglich der Maximum-Norm, d.h. $\|f-p\|_\infty$ und skizzieren Sie $f(x)$ und $p(x)$.

Lösung:

(a) Ansatz: $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, da wir insgesamt 5 Bedinungen erfüllen müssen und ein Polynom vierten Gerades 5 unbekannte Koeffizienten hat. Damit liefern die Interpolationsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad p(-2) = a - 2b + 4c - 8d + 16e \overset{!}{=} f(-2) = -2|-2+1| + 3 = 1 \\
&(2) \quad p(-1) = a - b + c - d + e \overset{!}{=} f(-1) = -2|-1+1| + 3 = 3 \\
&(3) \quad p(0) = a \overset{!}{=} f(0) = -2|0+1| + 3 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}
\end{aligned}
$$

Die zusätzlichen Bedingungen liefern mit der Ableitung von f

$$
f(x) = \begin{cases} 2(x+1)+3 & x \leq -1 \\ -2(x+1)+3 & x \geq -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 2 & x < -1 \\ -2 & x > -1 \end{cases}
$$

folgendes:

$$
\begin{aligned}
&(4) \quad p'(-2) = b - 4c + 12d - 32e \overset{!}{=} f'(-2) = 2 \\
&(5) \quad p'(0) = b \overset{!}{=} f'(0) = -2 \Rightarrow \boxed{b = -2}
\end{aligned}
$$

(1), (2) und (4) liefern noch ein LGS für c, d und e:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad 1 - 2(-2) + 4c - 8d + 16e = 1 \\
&(2) \quad 1 - (-2) + c - d + 4 = 3 \\
&(4) \quad -2 - 4c + 12d - 32e = 2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -8 & 16 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 12 & 32 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -8 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & -1 \\ & 1 & -3 & 1 \\ & & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
&\boxed{e = 1} \\
&d = (1 + 3 \cdot 1) = 4 \Rightarrow \boxed{d = 4} \\
&c = (-1 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4) = 3 \Rightarrow \boxed{c = 3}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir das Polynom zu:

$$
p(x) = 1 - 2x + 3x^2 + 4x^3 + x^4
$$

(b) p ist achsensymmetrisch zu $x = -1$, da das vollständige Hornerschma liefert:

	1	4	3	-2	1
$x=-1$	$-$	-1	-3	0	2
	1	3	0	-2	$\boxed{3 = \alpha_0^{(1)}}$
$x=-1$	$-$	-1	-2	2	
	1	2	-2	$\boxed{0 = \alpha_1^{(2)}}$	
$x=-1$	$-$	-1	-1		
	1	1	$\boxed{-3 = \alpha_2^{(3)}}$		
$x=-1$	$-$	-1			
	$\boxed{1 = \alpha_4^{(3)}}$	$\boxed{0 = \alpha_3^{(4)}}$			

$$\Rightarrow \; p(x) = 3 - 3(x+1)^2 + (x+1)^4$$
$$\Rightarrow \; p(-1+x) = p(-1-x)$$

Daher genügt hier die Betrachtung des Maximums von $|f-p|$ im Intervall $[-1,0]$. Definiere die Funktion

$$\begin{aligned} h(x) := f(x) - p(x) &= -2(x+1) + 3 - (3 - 3(x+1)^2 + (x+1)^4) \\ &= -2(x+1) + 3(x+1)^2 - (x+1)^4 \text{ für } x \in [-1,0] \end{aligned}$$

Um die Maxima/Minima von h in $[-1,0]$ zu finden müssen wir die Ableitung gleich null setzen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2 + 6(x+1) - 4(x+1)^3 = -4x^3 - 12x^2 - 6x = -2x[2x^2 + 6x + 3] \\ &= -2x\left[2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\right] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

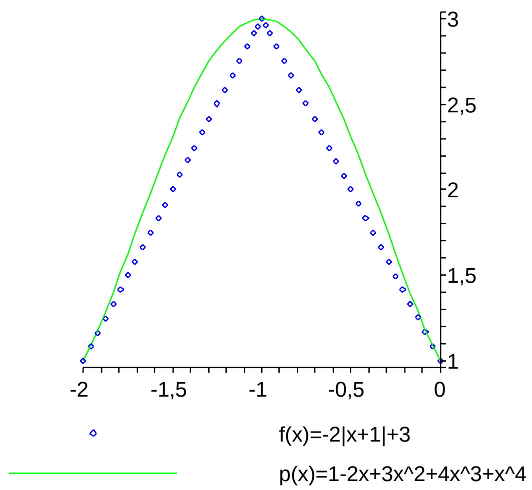
$$\Rightarrow x_1 = 0,\; x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_2 = -0.633974596 \in [-1,0];\; x_3 = -2.366025404 \notin [-1,0]$$

Da die Funktion h stetig ist, kann sie ihr Maximum/Minimum auch auf dem Rand annehmen. Aus der Interpolationsbedingung folgt damit

$$h(-1) = f(-1) - p(-1) = h(0) = f(0) - p(0) = 0.$$

Damit gilt nun

$$\|f-p\|_\infty = \max_{x \in [-1,0]} |h(x)| = |h(-0.634)| = 0.348076211.$$



Aufgabe 5: (mündlich)

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

und die Knoten $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ und $x_3 = 3$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_3 zu g in Newton- und Lagrange-Darstellung.

(b) Skizzieren Sie $g(x)$ und $p_3(x)$ sowie die benötigten Lagrange-Grundfunktionen im Intervall $[0, 3]$.

(c) Durch Hinzunahme von $x_4 = -1$ soll f in $[-1, 3]$ interpoliert werden. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom p_4 vom Grad 4 und skizzieren Sie $g(x)$ und $p_4(x)$ im Intervall $[-1, 3]$.

Lösung:

(a) Newton-Gestalt:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \omega_j(x)$$

mit den Grundfunktionen

$$\omega_0(x) = 1,\ \omega_j(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{j-1})$$

und den Koeffizienten

$$\alpha_j = [x_0, x_1, \ldots, x_j, \quad j = 0, \ldots, n$$

die sich rekursiv berechnen lassen durch die dividierten Differenzen

$$[x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+k} = \frac{[x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}] - [x_m, \ldots, x_{m+k-1}]}{x_{m+k} - x_m}.$$

Diese Berechnung kann man mit Hilfe des Differenzen-Schemas durchführen:

$$\begin{array}{c|llll}
x & f(x) & & & \\
x_0 = 0 & f(x_0) = [x_0] = 0 = \alpha_0 & & & \\
 & & [x_0, x_1] = \frac{1-0}{1-0} = 1 = \alpha_1 & & \\
x_1 = 1 & f(x_1) = [x_1] = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & & [x_0, x_1, x_2] = \frac{3-1}{2-0} = 1 = \alpha_2 & \\
 & & [x_1, x_2] = \frac{4-1}{2-1} = 3 & & [x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{0-1}{3-0} = -\frac{1}{3} = \alpha_3 \\
x_2 = 2 & f(x_2) = [x_2] = 4 - \sin(\pi) = 4 & & [x_1, x_2, x_3] = \frac{3-3}{3-1} = 0 & \\
 & & [x_2, x_3] = \frac{7-4}{3-2} = 3 & & \\
x_3 = 3 & f(x_3) = [x_3] = 6 - \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 7 & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \omega_i(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (x - x_0) + 1 \cdot (x - x_0)(x - x_1) - \frac{1}{3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= x + x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{2}{3}x
\end{aligned}$$

Lagrange-Darstellung:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x)$$

mit den Lagrange-Grundfunktionen

$$l_j(x) = \prod_{k=0; k \neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-1)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)} = -\frac{1}{8}(x^3-6x^2+11x-3)$$
$$l_1(x) = \frac{(x)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x)$$
$$l_2(x) = \frac{(x)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{2}(x^3-4x^2+3x)$$
$$l_3(x) = \frac{(x)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)$$
$$\Rightarrow p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)l_i(x) = 0l_0(x)+1l_1(x)+4l_2(x)+7l_3(x) = -\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{2}{3}x$$

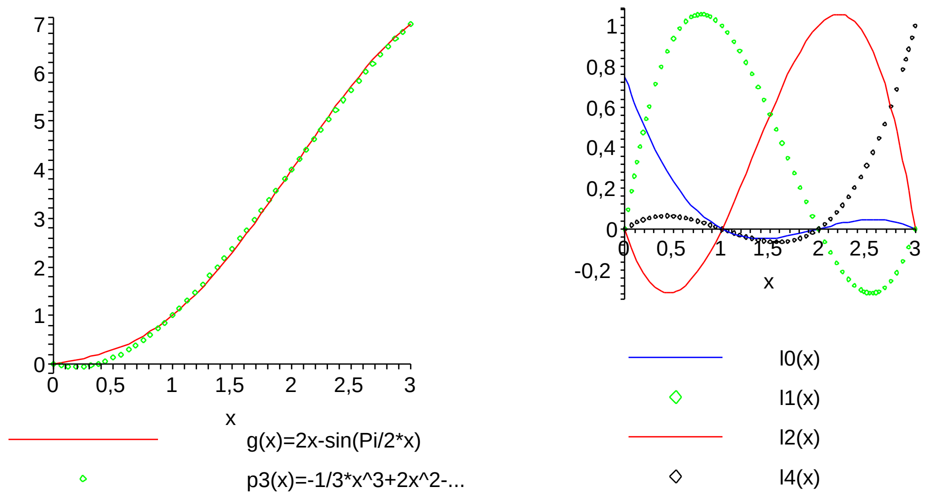


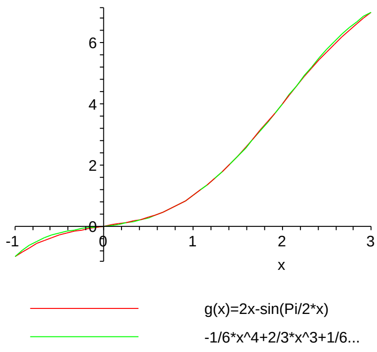
Abbildung 3: (b)

(c) Verwende Newton-Schema aus (a) und ergänze eine weitere Zeile:

$$\begin{array}{c|lllll}
x & f(x) & & & & \\
-1 & -1 = \alpha_0 & & & & \\
 & & \frac{0-(-1)}{0-(-1)} = 1 = \alpha_1 & & & \\
0 & 0 & & \frac{1-1}{1-(-1)} = 0 = \alpha_2 & & \\
 & & 1 & & \frac{1-0}{2-(-1)} = \frac{1}{3} = \alpha_3 & \\
1 & 1 & & 1 & & \frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{3-(-1)} = -\frac{1}{6} = \alpha_4 \\
 & & 3 & & -\frac{1}{3} & \\
2 & 4 & & 0 & & \\
 & & 3 & & & \\
3 & 7 & & & &
\end{array}$$

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \omega_i(x) = -1\cdot 1 + 1\cdot(x+1) + 0\cdot(x+1)(x) + \frac{1}{3}(x+1)(x)(x-1)$$
$$-\frac{1}{6}(x+1)(x)(x-1)(x-2) = -\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x$$

Aufgabe 6: (mündlich)



Von einer Funktion $f \in C^2([-1,3])$ seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(-1) = 2,\ f(0) = 0,\ f(1) = 6,\ f(2) = 4,\ f(3) = 0$$

(a) Nähern Sie das Integral $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ mit der zusammengesetzen Trapez-Regel unter Verwendung aller gegebenen Funktionswerte an.

(b) Schätzen Sie unter der Voraussetzung $|f''(x)| \leq 18$ für $x \in [-1,3]$ den Fehler ab.

Lösung:

(a) Trapezregel zur Schrittweite $h = 1, a = -1, b = 3, n = \frac{b-a}{h} = 4$:

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = J_T^{(4)} + Rf_T^{(4)}$$

$$\text{mit } J_T^{(4)} = h\left[\frac{1}{2}f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + \frac{1}{2}f(3)\right] = 1 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2 + 0 + 6 + 4 + \frac{1}{2} \cdot 0\right] = 11$$

(b) Abschätzung für den Fehler:

$$|Rf_T^{(4)}| \leq \max_{x \in [-1,3]} \left| \frac{(3-(-1))^3}{12} \cdot \frac{1}{4^2} f''(x) \right| \leq \frac{4^3}{12} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 18 = 6$$