



**Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik
und für Ingenieurwesen
SS 2005**

5. Übungsblatt — 17. Juni 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten) (2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -2|x + 1| + 3$ und die Knoten $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0$.

- Interpolieren Sie die Funktion f durch einen kubischen Spline s , der den Randbedingungen $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$ genügt.
- Berechnen Sie den Interpolationsfehler zu f in $[-2, 0]$ bezüglich der Maximum-Norm, d.h. $\|f - s\|_\infty$ und skizzieren Sie $f(x)$ und $s(x)$.

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{24}{2-x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $x_0 = -4, x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0$.

- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_3 vom Grad 3 zu f in Newton- und Lagrange-Darstellung.
- Skizzieren Sie $f(x)$ und $p_3(x)$, sowie die benötigten Lagrange-Grundfunktionen im Intervall $[x_0, x_3]$.
- Durch Hinzunahme des Knotens $x_4 = 1$ soll f in $[-4, 1]$ interpoliert werden. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom p_4 vom Grad 4 mit möglichst geringem Aufwand.

Aufgabe 3: (schriftlich zu bearbeiten) (3 Punkte)

Gegeben sei

$$J := \int_0^2 3^{3x-1} dx = \frac{728}{9 \ln 3} = 73.62823965$$

- Nähern Sie J mit der Trapez-, Mittelpunkt- und Kepler-Regel sowie mit den dazugehörigen zusammengesetzten Formeln zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ an.
- Wenden Sie für jede dieser Näherungen die bekannten Fehlerabschätzungen an und vergleichen Sie diese mit dem wirklichen Fehler.
- Wieviele Funktionsauswertungen des Integranden sind erforderlich, um mit der zusammengesetzten Trapez-, Mittelpunkt- und Kepler-Regel zur Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ das Integral J mit einer Genauigkeit von 10^{-4} zu berechnen?

Aufgabe 4: (mündlich)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -2|x + 1| + 3$ und die Knoten $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0$ aus Aufgabe 1.

- (a) Interpolieren Sie die Funktion f durch ein Polynom p , das den zusätzlichen Bedingungen $p'(x_0) = f'(x_0)$ und $p'(x_2) = f'(x_2)$ genügt.
- (b) Berechnen Sie den Interpolationsfehler zu f in $[-2, 0]$ bezüglich der Maximum-Norm, d.h. $\|f - p\|_\infty$ und skizzieren Sie $f(x)$ und $p(x)$.

Aufgabe 5: (mündlich)

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

und die Knoten $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ und $x_3 = 3$.

- (a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_3 zu g in Newton- und Lagrange-Darstellung.
- (b) Skizzieren Sie $g(x)$ und $p_3(x)$ sowie die benötigten Lagrange-Grundfunktionen im Intervall $[0, 3]$.
- (c) Durch Hinzunahme von $x_4 = -1$ soll f in $[-1, 3]$ interpoliert werden. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom p_4 vom Grad 4 und skizzieren Sie $g(x)$ und $p_4(x)$ im Intervall $[-1, 3]$.

Aufgabe 6: (mündlich)

Von einer Funktion $f \in C^2([-1, 3])$ seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(-1) = 2, f(0) = 0, f(1) = 6, f(2) = 4, f(3) = 0$$

- (a) Nähern Sie das Integral $\int_{-1}^3 f(x)dx$ mit der zusammengesetzten Trapez-Regel unter Verwendung aller gegebenen Funktionswerte an.
- (b) Schätzen Sie unter der Voraussetzung $|f''(x)| \leq 18$ für $x \in [-1, 3]$ den Fehler ab.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 30. Juni 2005, 14:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik für Informatiker“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30) gegenüber von Zimmer 112.
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name, Matrikelnummer und Teilnehmernummer und heften Sie die Blätter zusammen.