UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Scherer
Dipl.-Math. Heike Stoll

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen SS 2005

4. Übungsblatt — 03. Juni 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Bestimmen Sie $a_0, \ldots, a_7 \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $s_a : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s_a(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 & -2 \le x \le -1 \\ (x+1)^4 + a_4 x^4 - 1 & -1 \le x \le 0 \\ a_5 x + a_6 x^2 + a_7 x^3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\triangle := \{-2, -1, 0, 1\}$ mit den Randbedingungen $s_a(-2) = -12$ und $s_a(1) = 16$ ist.

(b) Entwickeln Sie das Polynom $p(x) = 1 + 3x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + 24x^5 - 16x^6$ nach Tschebyscheff-Polynomen.

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d > 0,\ ad + bc \neq 0.$$

Anstelle von $Ax = b$ löse man das Gleichungssystem

$$D_1^{-1} A D_2 y = D_1^{-1} b \text{ mit } D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{abcd} & 0 \\ 0 & cd \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{abcd} & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ergibt sich dann aus $x = D_2 y$. Berechnen Sie für $a = 100$, $b = 0.01$, $c = 99$, $d = 0.01$ die Konditionszahlen $\mathrm{cond}_Z(A)$ und $\mathrm{cond}_Z(D_1^{-1} A D_2)$.

(b) Die Funktion $f(x) = \cot\left(\frac{x}{2}\right)$ kann durch

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$$

berechnet werden. Untersuchen Sie die Kondition von $f(x)$ bezüglich einer Störung in x, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mit absolutem und relativem Fehler.

(c) $f(x)$ wird mit dem Algorithmus

$$y_0 = \sin(x),\ y_1 = \cos(x),\ y_2 = 1 - y_1,\ y_3 = \frac{y_0}{y_2}$$

ausgewertet. Untersuchen Sie die Kondition dieses Algorithmus (bezüglich absolutem und relativem Fehler).

Aufgabe 3: (mündlich)

Untersuchen Sie für welche p, q die Berechnung der größten Nullstelle von $x^2 + 2px - q$ mit Hilfe der Formel $\varphi(p, q) := -p + \sqrt{p^2 + q}$ gut bzw. schlecht konditioniert ist.

Aufgabe 4: (mündlich)

Zeigen Sie, dass die Funktion $s_{\alpha,\beta} : [-3, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha(8 + 12x + 6x^2 + x^3) - (2 + x) & -3 \le x \le -2 \\ 6 + 11x + 6x^2 + x^3 & -2 \le x \le -1 \\ 4 + 5x - x^3 & -1 \le x \le 0 \\ 4 + 5x + \beta x^3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\triangle := -3, -2, -1, 0, 1$ ist. Bestimmen Sie nun α und β so, dass die folgenden Randbedingungen erfüllt sind:

$$(a):\ s(-3) = 0 \text{ und } s(1) = 2, \quad (b):\ s''(-3) = 2 \text{ und } s''(1) = 0, \quad (c):\ s'(-3) = s'(1) = 8$$

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie für die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x)$, $n \ge 0$ die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & m \ne n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \ne 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases} .$$

(b) Beweisen Sie die dreigliedrige Rekursionsformel für die Tschebyscheff-Polynome:

$$T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \ge 1, T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$$

(c) Entwickeln Sie das Polynom $q(x) = -3 + 2x + 6x^2 + 4x^3 - 8x^4$ nach Tschebyscheff-Polynomen.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 16. Juni 2005, 14:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik für Informatiker“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30) gegenüber von Zimmer 112.
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name, Matrikelnummer und Teilnehmernummer und heften Sie die Blätter zusammen.