



Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen – SS 2005

Lösungen zum 3. Übungsblatt — 13. Mai 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten)

- (a) Untersuchen Sie, ob folgende Matrizen eine Cholesky-Zerlegung besitzen und berechnen Sie diese gegebenenfalls

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (b) Verwenden Sie das Horner-Schema, um

(1) den linearen Faktor $x - 2$ von $p(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 10x - 10$ und

(2) den quadratischen Faktor $x^2 + 2x + 2$ von $q(x) = 3x^6 + 2x^5 - x^4 - 7x^3 - 5x + 4$

abzuspalten.

- (c) Berechnen Sie für

$$r(x) = -3x^5 + 2x^4 - x^3 + x - 2$$

mit Hilfe des vollständigen Horner-Schemas $p^{(\nu)}(-1)$ für $\nu = 0, 1, \dots, 5$ und entwickeln Sie damit $r(x)$ nach Potenzen von $(x + 1)$.

Lösung:

- (a) A besitzt eine Cholesky-Zerlegung $\Leftrightarrow A$ ist symmetrisch und positiv definit
 A positiv definit \Leftrightarrow Alle Hauptunterdeterminanten von A sind positiv

- A_1 ist symmetrisch und es gilt

$$\det(4) = 4 > 0, \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = 4 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 36 > 0.$$

$\Rightarrow A_1$ positiv definit, besitzt also eine Cholesky-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- A_2 ist symmetrisch, aber nicht positiv definit, da $\det(-3) = -3 < 0$ und besitzt deswegen keine Cholesky-Zerlegung.
- A_3 ist nicht symmetrisch ($a_{21} \neq a_{12}$), besitzt also keine Cholesky-Zerlegung.

- A_4 ist symmetrisch und es gilt

$$\det(1) = 1 > 0, \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix} = 1 \cdot 13 - (-2)(-2) = 9 > 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix} = 36 > 0.$$

$\Rightarrow A_4$ ist positiv definit. Die Cholesky-Zerlegung ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Horner-Schema allgemein für $p(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}x^{\nu}$:

(1) Abspaltung eines Linearfaktors $(x - \alpha)$ (Euklidischer Algorithmus):

$$p_n(x) = (x - \alpha)p_{n-1}(x) + a_0^{(1)} \Rightarrow p_n(\alpha) = a_0^{(1)}$$

$$p_{n-1}(x) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}^{(1)}x^{\nu-1}$$

Horner-Schema:

$x = \alpha$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
	$-$	$\alpha a_n^{(1)}$	$\alpha a_{n-1}^{(1)}$	\dots	$\alpha a_2^{(1)}$	$\alpha a_1^{(1)}$
	$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	\dots	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)} = p_n(\alpha)$

Hier:

$\alpha = 2$	1	-4	1	10	-10
	$-$	2	-4	-6	8
	1	-2	-3	4	-2

$\Rightarrow p(x) = (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) - 2$

(2) Abspaltung eines quadratischen Faktors $(x^2 - sx - t)$:

$$p_n(x) = (x^2 - sx - t)p_{n-2}(x) + a_1^{(1)}x + a_0^{(1)}$$

$$p_{n-2}(x) = \sum_{\nu=2}^n a_{\nu}^{(1)}x^{\nu-2}$$

Horner-Schema:

$x = s$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	a_2	a_1	a_0
	$-$	$sa_n^{(1)}$	$sa_{n-1}^{(1)}$	$sa_{n-2}^{(1)}$	\dots	$sa_3^{(1)}$	$sa_2^{(1)}$	$-$
$x = t$	$-$	$-$	$ta_n^{(1)}$	$ta_{n-1}^{(1)}$	\dots	$ta_4^{(1)}$	$ta_3^{(1)}$	$ta_2^{(1)}$
	$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$a_{n-3}^{(1)}$	\dots	$a_2^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)}$

Hier:

$x = -2$	3	2	-1	-7	0	-5	4
	$-$	-6	8	-2	2	0	$-$
$t = -2$	$-$	$-$	-6	8	-2	2	0
	3	-4	1	-1	0	-3	4

$\Rightarrow q(x) = (x^2 + 2x + 2)(3x^4 - 4x^3 + x^2 - x) - 3x + 4$

(c) Vollständiges Horner Schema:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x)(x - \alpha) + a_0^{(1)}; a_0^{(1)} = p_n(\alpha)$$

$$\vdots$$

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j^{(j+1)}(x - \alpha)^j = \sum_{j=0}^n \frac{p_n^{(j)}(\alpha)}{j!}(x - \alpha)^j$$

$x = \alpha$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
$x = \alpha$	-	$\alpha a_n^{(1)}$	$\alpha a_{n-1}^{(1)}$	\dots	$\alpha a_2^{(1)}$	$\alpha a_1^{(1)}$
$x = \alpha$	$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	\dots	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)} = p_n(\alpha)$
$x = \alpha$	-	$\alpha a_n^{(2)}$	$\alpha a_{n-1}^{(2)}$	\dots	$\alpha a_2^{(2)}$	
	$a_n^{(2)}$	$a_{n-1}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	\dots	$a_1^{(2)} = \frac{p_n^{(1)}(\alpha)}{1!}$	
\vdots						
$x = \alpha$	$a_n^{(n-1)}$	$a_{n-1}^{(n-1)}$	$a_{n-2}^{(n-1)} = \frac{p_n^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!}$			
$x = \alpha$	-	$\alpha a_n^{(n)}$				
	$a_n^{(n)} = \frac{p_n^{(n)}(\alpha)}{n!}$	$a_{n-1}^{(n)} = \frac{p_n^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}$				

Hier:

$x = -1$	-3	2	-1	0	1	-2
$x = -1$	-	3	-5	6	-6	5
$x = -1$	-3	5	-6	6	-5	$3 = p(-1)$
$x = -1$	-	3	-8	14	-20	
$x = -1$	-3	8	-14	20	$-25 = p^{(1)}(-1)$	
$x = -1$	-	3	-11	25		
$x = -1$	-3	11	-25	$45 = \frac{p_n^{(2)}(-1)}{2!}$		$\Rightarrow p^{(2)}(-1) = 90$
$x = -1$	-	3	-14			
$x = -1$	-3	14	$-39 = \frac{p^{(3)}}{3!}$		$\Rightarrow p^{(3)}(-1) = -234$	
$x = -1$	-	3				
	$-3 = \frac{p^{(5)}(-1)}{5!}$	$17 = \frac{p^{(4)}(-1)}{4!}$	$\Rightarrow p^{(4)}(-1) = 408$			
	\downarrow					
	$p^{(5)}(-1) = -360$					

$$p(x) = 3 - 25(x + 1) + 45(x + 1)^2 - 39(x + 1)^3 + 17(x + 1)^4 - 3(x + 1)^5$$

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sei das Polynom $p(x) = -3x^4 + 4x^3 + 16x^2 - \frac{104}{9}x - \frac{1}{27}$.

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von p liegen.
- (b) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um zu zeigen, dass p je eine Nullstelle in den Intervallen $[-3, -1.5]$, $[-1.5, 0.5]$, $[0.5, 2]$ und $[2, 3]$ besitzt.
- (c) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$ drei Schritte des Newton-Verfahrens zur Berechnung der größten Nullstelle durch.

Lösung:

- (a) Gerschgorin: Die Nullstellen ξ_1, \dots, ξ_n des Polynoms $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ liegen in einem Kreis um Null mit Radius r ($\mathcal{K}(0, r)$), wobei

$$r \leq \max \left\{ 1, \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \right\} \quad \text{und}$$

$$r \leq \max \{ |a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}| \}.$$

Dazu muss $p(x)$ normalisiert werden: $\tilde{p}(x) = p(x)/(-3) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{104}{27}x + \frac{1}{81}$. Die Polynome \tilde{p} und p haben die selben Nullstellen! Gerschgorin liefert:

$$r \leq \left\{ 1, \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| -\frac{16}{3} \right| + \left| \frac{104}{27} \right| + \left| \frac{1}{81} \right| \right\} = \frac{853}{81} = 10.5309$$

$$r \leq \left\{ \left| \frac{1}{81} \right|, 1 + \left| \frac{104}{27} \right|, 1 + \left| -\frac{16}{3} \right|, 1 + \left| -\frac{4}{3} \right| \right\} = 6.\bar{3}$$

Alle Nullstellen von p liegen in $\mathcal{K}(0, 6.\bar{3})$.

- (b) Konstruktion einer Sturmschen Kette:

$p_0 = p$ und $p_1 = p'$;

p_j ($j \geq 2$) mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, d.h. $p_{j-1} = q_j p_j - p_{j+1}$ mit Grad $p_{j+1} <$ Grad p_j .

Also:

$$p(x) = -3x^4 + 4x^3 + 16x^2 - \frac{104}{9}x - \frac{1}{27} =: p_0(x)$$

$$p'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 32x - \frac{104}{9} \Rightarrow p_1(x) := \frac{p'(x)}{4} = -3x^3 + 3x^2 + 8x - \frac{26}{9}$$

$$\underline{p_0(x) : p_1(x)} : \left(-3x^4 + 4x^3 + 16x^2 - \frac{104}{9}x - \frac{1}{27} \right) : \left(-3x^3 + 3x^2 + 8x - \frac{26}{9} \right) = x - \frac{1}{3} =: q_1(x)$$

$$\begin{array}{r} -(-3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - \frac{26}{9}) \\ \hline x^3 + 8x^2 - \frac{26}{3}x - \frac{1}{27} \\ - (x^3 - x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{27}) \\ \hline 9x^2 - 6x - 1 =: -p_2(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow p_0(x) = q_1(x)p_1(x) - p_2(x) = \left(x - \frac{1}{3} \right) p_1(x) - (-9x^2 + 6x + 1)$$

$$\underline{p_1(x) : p_2(x)} : \left(-3x^3 + 3x^2 + 8x - \frac{26}{9} \right) : \left(-9x^2 + 6x + 1 \right) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} =: q_2(x)$$

$$\begin{array}{r} -(-3x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x) \\ \hline x^2 + \frac{23}{3}x - \frac{26}{9} \\ - (x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}) \\ \hline \frac{25}{3}x - \frac{25}{9} =: -p_3(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow p_1(x) = q_2(x)p_2(x) - p_3(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \right) p_2(x) - \left(-\frac{25}{3}x + \frac{25}{9} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_2(x) : p_3(x)}{(-9x^2 + 6x + 1) : (-\frac{25}{3}x - \frac{9}{25})} &= \frac{27}{25}x - \frac{9}{25} =: q_3(x) \\ &\quad - \frac{-(9x^2 + 3x)}{3x + 1} \\ &\quad - \frac{(3x - 1)}{2} =: -p_4(x) \\ \Rightarrow p_2(x) &= q_3(x)p_3(x) - p_4(x) = \left(\frac{27}{25}x - \frac{9}{25}\right)p_3(x) - 2 \end{aligned}$$

Die Polynome p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 bilden eine Sturmsche Kette. Untersuchung der Vorzeichenwechsel für $x = -3, -1.5, 0.5, 2, 3$:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	VZW
-3	-	+	-	+	-	4
-1.5	+	+	-	+	-	3
0.5	-	+	+	-	-	2
2	+	+	-	-	-	1
3	-	-	-	-	-	0

Mit dem Satz von Sturm und der Wechselzahl $W(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m) = \text{Anzahl der VZW in } \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m$ gilt:

$$\begin{aligned} Z_\alpha^\beta(p_0) &= W(p_0(\alpha), p_1(\alpha), \dots, p_m(\alpha)) - W(p_0(\beta), p_1(\beta), \dots, p_m(\beta)) \\ \Rightarrow \begin{aligned} Z_{-3}^{-1.5} &= 4 - 3 = 1 && [-3, -1.5] \\ Z_{-1.5}^{0.5} &= 3 - 2 = 1 && [-1, 0.5] \\ Z_{0.5}^2 &= 2 - 1 = 1 && [0.5, 2] \\ Z_2^3 &= 1 - 0 = 1 && [2, 3] \end{aligned} \Rightarrow \text{je eine NSst in} \end{aligned}$$

(c) Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{-3x_n^4 + 4x_n^3 + 16x_n^2 - \frac{104}{9}x_n - \frac{1}{27}}{-12x_n^3 + 12x_n^2 + 32x_n - \frac{104}{9}} \\ x_0 &= 3 \\ x_1 &= 3 - \frac{-3 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 16 \cdot 3^2 - \frac{104}{9} \cdot 3 - \frac{1}{27}}{-12 \cdot 3^3 + 12 \cdot 3^2 + 32 \cdot 3 - \frac{104}{9}} = 2.804617117 \\ x_2 &= 2.761589065 \\ x_3 &= 2.759600313 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (mündlich)

Gegeben seien die fünf Wertepaare (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, 4$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	8	2	1	4	10

(a) Zeigen Sie, dass keine Funktion $f(x) = a + bx^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, 4$.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a^* und b^* so, dass die Funktion

$$\Psi(a, b) := \sum_{i=0}^4 |y_i - (a + bx_i^2)|^2, \quad a, b, \in \mathbb{R}$$

für a^* und b^* ihr Minimum annimmt und berechnen Sie dieses.

Lösung:

- (a) Annahme: Es existiert eine Funktion $f(x) = a + bx^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x_i) = a + bx_i^2 = y_i$, $i = 0, \dots, 4$.
Dann ist dies äquivalent zu:

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y \text{ mit } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Aber mit Gauß gilt:

$$A|y = \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & \\ 0 & -3 & -6 & \\ 0 & -4 & -7 & \\ 0 & -3 & -4 & \\ 0 & 0 & 2 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Rg}(A) = 2 < \text{Rg}(A|y) = 3$$

\Rightarrow überbestimmtes LGS \Rightarrow unlösbar $\Rightarrow f(x)$ existiert nicht

□

- (b)

$$\Psi(a, b) = \sum_{i=0}^4 |y_i - (a + bx_i^2)|^2 = \sum_{i=0}^4 |y_i - f(x_i)|^2 = \left\| y - A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| r \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Das Minimum des Residuums in der Euklid-Norm ist gegeben durch die Lösung der Normalgleichung $A^\top Ax = A^\top y$.¹ Mit

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 34 \end{pmatrix} \text{ und}$$
$$A^\top y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 78 \end{pmatrix}$$

folgt mit Gauß:

$$A^\top A | A^\top y = \begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 25 \\ 10 & 34 & 78 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 25 \\ 0 & 14 & 28 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$
$$\Rightarrow b^* = 2, a^* = 5 - 2 \cdot 2 = 1$$
$$\Rightarrow f(x) = a^* + b^*x^2 = 1 + 2x^2$$

Wert des Minimums:

$$\Psi(a^*, b^*) = \Psi(1, 2) = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$
$$= (8-9)^2 + (2-3)^2 + (1-1)^2 + (4-3)^2 + (10-9)^2 = 4$$

¹Satz 3.7: A hat vollen Rang. Die eindeutig bestimmte Lösung x^* der Normalgleichung $A^\top Ax = A^\top y$ löst das überbestimmte LGS $Ax = y$ bestmöglich, d.h. $\|r(x^*)\|_2$ ist minimal.

Aufgabe 4: (mündlich)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -2 \\ -1 & -5 & 13 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -17 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix und lösen Sie damit das LGS $Ax = b$.**Lösung:** 3 Alternativen zur Durchführung der Cholesky-Zerlegung:**1. Alternative:** Ablesen der Koeffizienten von L aus Matrixdarstellung

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -2 \\ -1 & -5 & 13 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & -2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Alternative Cholesky-Algorithmus

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$2. \text{ Zeile: } l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - |l_{21}|^2} = \sqrt{3 - |1|^2} = \sqrt{2}$$

$$3. \text{ Zeile: } l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}l_{21}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-5 - (-1) \cdot 1) = -2\sqrt{2}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - |l_{31}|^2 - |l_{32}|^2} = \sqrt{13 - (-1)^2 - (-2\sqrt{2})^2} = 2$$

$$4. \text{ Zeile: } l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$l_{42} = \frac{1}{l_{22}}(a_{42} - l_{41}l_{21}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2 - 0 \cdot 1) = -\sqrt{2}$$

$$l_{43} = \frac{1}{l_{33}}(a_{43} - l_{41}l_{31} - l_{42}l_{32}) = \frac{1}{2}(4 - 0 \cdot (-1) - (-\sqrt{2})(-2\sqrt{2})) = 0$$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - |l_{41}|^2 - |l_{42}|^2 - |l_{43}|^2} = \sqrt{3 - 0^2 - \sqrt{2}^2 - 0^2} = 1$$

3. Alternative: Gauß Algorithmus

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -2 & 1 & 2 & -4 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 13 & 4 & -1 & -4 & 12 & 4 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 & -2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 0 & -2 & 4 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{array}$$

Damit gilt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & -2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und das LGS $Ax = b$ geht über in $L\underbrace{L^\top x}_{=:y} = b$. Löse (1) $Ly = b$ und dann (2) $L^\top x = y$:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 5 & & \\ -1 & -2\sqrt{2} & 2 & 0 & -17 & & \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 & -5 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = (5-1)/\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ y_3 = (-17+1+2\sqrt{2}2\sqrt{2})/2 = -4 \\ y_4 = (-5+\sqrt{2}2\sqrt{2}) = -1 \end{array} \\
 (2) \quad & \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & & \\ 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - (-3) + (-2) = 2 \\ x_2 = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot (-2) + \sqrt{2}(-1))/\sqrt{2} = -3 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = -1 \end{array} \\
 \Rightarrow x = & (2, -3, -2, -1)^\top
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5: (mündlich)

(a) Gegeben sei das Polynom

$$p(x) = \frac{1}{16}x^6 - 10x^3 + 75.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des vollständigen Horner-Schemas $p^{(\nu)}(2)$ für $\nu = 0, 1, \dots, 6$ und entwickeln Sie damit $p(x)$ nach Potenzen von $(x-2)$.

(b) Gegeben sei das Polynom

$$q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 6.$$

Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von q in den Intervallen $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ zu bestimmen.

Lösung:

(a)

$x = 2$	$\frac{1}{16}$	0	0	-10	0	0	75
	-	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-19	-38	-76
$x = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{19}{2}$	-19	-38	$-1 = p(2)$
	-	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-16	-70	
$x = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	-8	-35		$-108 = p'(2)$
	-	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	3	-10		
$x = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	-5	$-45 = \frac{p''(2)}{2!}$		$p''(2) = -90$
	-	$\frac{1}{8}$	1	5			
$x = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$0 = \frac{p^{(3)}(2)}{3!}$			$p^{(3)}(2) = 0$
	-	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$				
$x = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{4} = \frac{p^{(4)}(2)}{4!}$				$p^{(4)}(2) = 90$
	-	$\frac{1}{8}$					
$x = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4} = \frac{p^{(5)}(2)}{5!}$					$p^{(5)}(2) = 90$
	-						
	$= \frac{p^{(6)}(2)}{6!}$						$p^{(6)}(2) = 45$

$$p(x) = -1 - 108(x-2) - 45(x-2)^2 + \frac{15}{4}(x-2)^4 + \frac{3}{4}(x-2)^5 + \frac{1}{16}(x-2)^6$$

(b)

$$\begin{aligned}q(x) &= x^3 + 3x^2 + 6x - 6 =: p_0(x) \\q'(x) &= 3x^2 + 6x + 6 \Rightarrow p_1(x) = \frac{q'(x)}{3} = x^2 + 2x + 2 \\ \underline{p_0(x) : p_1(x)} &: (x^3 + 3x^2 + 6x - 6) : (x^2 + 2x + 2) = x + 1 =: q_1(x) \\ &\quad - \underline{(x^3 + 2x^2 + 2x)} \\ &\quad \quad x^2 + 4x - 6 \\ &\quad \quad - \underline{(x^2 + 2x + 2)} \\ &\quad \quad \quad 2x - 8 \Rightarrow p_2(x) = -x + 4 \\ &\quad \Rightarrow p_0(x) = (x + 1)p_1(x) - (-2x + 8) \\ \underline{p_1(x) : p_2(x)} &: (x^2 + 2x + 2) : (-x + 4) = -x - 6 =: q_2(x) \\ &\quad - \underline{(x^2 - 4x)} \\ &\quad \quad 6x + 2 \\ &\quad \quad - \underline{(6x - 24)} \\ &\quad \quad \quad 26 = -p_3(x) \\ &\quad \Rightarrow p_1(x) = (-x - 6)p_2(x) - (-26)\end{aligned}$$

p_0, p_1, p_2, p_3 bilden eine Sturmsche Kette. Untersuchung der Vorzeichenwechsel für $x = -1, 0, 1$

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	VZW
-1	-	+	+	-	2
0	-	+	+	-	2
1	+	+	+	-	1

Mit dem Satz von Sturm und der Wechselzahl $W(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m) = \text{Anzahl der VZW in } \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m$ gilt:

$$\begin{aligned}Z_\alpha^\beta(p_0) &= W(p_0(\alpha), p_1(\alpha), \dots, p_m(\alpha)) - W(p_0(\beta), p_1(\beta), \dots, p_m(\beta)) \\ \Rightarrow Z_{-1}^0 &= 2 - 2 = 0 \\ Z_0^1 &= 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

Damit hat die Funktion q in $[-1, 0]$ keine und in $[0, 1]$ eine Nullstelle!