



Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik
und für Ingenieurwesen – SS 2005

Lösung zum 2. Übungsblatt — 29. April 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten)

- (1) (a) Zeigen Sie, dass die l_1 -Norm und die Maximum-Norm Vektornormen sind. 1/2
- (b) Zeigen Sie, dass N_G und N_Z Matrixnormen sind. 1
- (c) Zeigen Sie, dass N_G mit der l_1 -Norm und N_Z mit der Maximum-Norm verträglich sind. 1
- (2) Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

folgende Normen $N_G(A)$, $N_Z(A)$, $N_S(A)$, $N_\rho(A)$ sowie $\rho(A)$. 3/2

Lösung:

- (1) (a) l_1 -Norm:

Definitheit: für $x \neq 0$ gilt: $\|x\|_1 = \sum_j |x_j| > 0$, da mindestens ein $x_j \neq 0$

Homogenität: $\alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\|_1 = \sum_j |\alpha x_j| = \sum_j |\alpha| |x_j| = |\alpha| \sum_j |x_j| = |\alpha| \|x\|_1$

Dreiecksungleichung: $\|x + y\|_1 = \sum_j |x_j + y_j| \leq \sum_j (|x_j| + |y_j|)$
 $= \sum_j |x_j| + \sum_j |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

max-Norm:

Definitheit: für $x \neq 0$ gilt: $\|x\|_\infty = \max_j |x_j| > 0$, da mindestens ein $x_j \neq 0$

Homogenität: $\alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\|_\infty = \max_j |\alpha x_j| = |\alpha| \max_j |x_j| = |\alpha| \|x\|_\infty$

Dreiecksungleichung: $\|x + y\|_\infty = \max_j |x_j + y_j| \leq \max_j (|x_j| + |y_j|)$
 $\leq \max_j |x_j| + \max_j |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

- (b) N_G :

Definitheit: für $A \neq 0$ gilt: $N_G(A) = n \max_{j,k} |a_{jk}| > n \cdot 0 = 0$, da mindestens ein $a_{jk} \neq 0$

Homogenität: $\alpha \in \mathbb{R} : N_G(\alpha A) = n \max_{j,k} |\alpha a_{jk}| = n |\alpha| \max_{j,k} |a_{jk}| = |\alpha| N_G(A)$

$$\begin{aligned} \text{Dreiecksungleichung: } N_G(A+B) &= n \max_{j,k} |a_{jk} + b_{jk}| \leq n \max_{j,k} (|a_{jk}| + |b_{jk}|) \\ &\leq n \left(\max_{j,k} |a_{jk}| + \max_{j,k} |b_{jk}| \right) = N_G(A) + N_G(B) \end{aligned}$$

Multiplikativität:

$$\begin{aligned} N_G(A \cdot B) &= n \max_{j,k} \left| \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lk} \right| = n \max_{j,k} |a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \dots + a_{jn} b_{nk}| \\ &\leq n \max_{j,k} \left| \max_l |a_{jl}| (b_{1k} + b_{2k} + \dots + b_{nk}) \right| \\ &\leq n \max_{j,k} \left| \max_l |a_{jl}| n \max_i |b_{ik}| \right| = n \max_{j,l} |a_{jl}| n \max_{i,k} |b_{ik}| \\ &= N_G(A) \cdot N_G(B) \end{aligned} \quad \boxed{1/2}$$

N_Z :

Definitheit: für $A \neq 0$ gilt: $N_Z(A) = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| > 0$, da mindestens ein $a_{jk} \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Homogenität: } \alpha \in \mathbb{R} : N_Z(\alpha A) &= \max_j \sum_{k=1}^n |\alpha a_{jk}| = \max_j \sum_{k=1}^n |\alpha| |a_{jk}| = \max_j |\alpha| \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \\ &= |\alpha| N_Z(A) \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} N_Z(A+B) &= \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk} + b_{jk}| \leq \max_j \sum_{k=1}^n (|a_{jk}| + |b_{jk}|) \\ &= \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| + \sum_{k=1}^n |b_{jk}| \right) \leq \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| + \max_i \sum_{k=1}^n |b_{ik}| \\ &= N_Z(A) + N_Z(B) \end{aligned}$$

Multiplikativität:

$$\begin{aligned} N_Z(A \cdot B) &= N_Z \left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ik} \right)_{jk} \right) = \max_j \sum_{k=1}^n \left| \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ik} \right| \\ &= \max_j \left| \sum_{k=1}^n (a_{j1} b_{1k} + \dots + a_{jn} b_{nk}) \right| \\ &= \max_j |a_{j1} b_{11} + \dots + a_{jn} b_{n1} + a_{j1} b_{12} + \dots + a_{jn} b_{n2} \\ &\quad + \dots + a_{j1} b_{1n} + \dots + a_{jn} b_{nn}| \\ &\leq \max_j \left(\max_i |b_{i1}| \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} \right| + \dots + \max_i |b_{in}| \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} \right| \right) \\ &\leq \max_j \left(\max_i \sum_{l=1}^k |b_{il}| \cdot \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right) \\ &= \left(\max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right) \cdot \left(\max_i \sum_{l=1}^n |b_{il}| \right) = N_Z(A) \cdot N_Z(B) \end{aligned} \quad \boxed{1/2}$$

(c) Verträglichkeit von N_G mit l_1 -Norm: Zu zeigen ist $\|Ax\|_1 \leq N_G(A) \|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\|Ax\|_1 = \sum_{j=1}^n |(Ax)_j| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}| |x_k|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n (|a_{j1}| |x_1| + |a_{j2}| |x_2| + \dots + |a_{jn}| |x_n|) \\
&\leq \sum_{j=1}^n \left(\max_l |a_{jl}| (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \right) = \sum_{j=1}^n \max_l |a_{jl}| \cdot \sum_{k=1}^n |x_k| \\
&= \sum_{j=1}^n \max_l |a_{jl}| \|x\|_1 \leq n \max_{j,l} |a_{jl}| \|x\|_1 = N_G(A) \|x\|_1 \quad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

Verträglichkeit von N_Z mit max-Norm: Zu zeigen ist $\|Ax\|_\infty \leq N_Z(A) \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_\infty &= \max_j |(Ax)_j| = \max_j \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \leq \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| |x_k| \\
&\leq \max_j \sum_{k=1}^n \left(|a_{jk}| \cdot \max_l |x_l| \right) = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \cdot \max_l |x_l| = N_Z(A) \|x\|_\infty \quad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

(2)

$$N_G(A) = n \max_{j,k} |a_{jk}| = 4 \cdot 3 = 12$$

$$N_Z(A) = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = \max \{3, 6, 6, 4\} = 6 \quad N_G, N_Z, N_S = \boxed{1/2}$$

$$N_S(A) = \max_k \sum_{j=1}^n |a_{jk}| = \max \{3, 7, 4, 5\} = 7$$

$$N_\rho(A) = \sqrt{\rho(A^\top A)} = \sqrt{\max_j |\lambda_j[A^\top A]|}$$

$$\rho(A) = \max_j |\lambda_j[A]|$$

Wir benötigen nun die Eigenwerte von A und von $A^\top A$. Diese ergeben sich aus $\det(A - \lambda I) = 0$ und $\det(A^\top A - \lambda I) = 0$. Zuerst zu den Eigenwerten von A :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & 3 \\ -2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{1. Spalte} = \text{1. Spalte} \\ \text{+ 2. Spalte} - \text{3. Spalte} \end{array} \\
&= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ -\lambda & 1 - \lambda & 3 \\ \lambda & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{3. Zeile} = \text{3. Zeile} + \text{1. Zeile} \\ \text{2. Zeile} = \text{2. Zeile} - \text{1. Zeile} \end{array} \\
&= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3 - \lambda)(-\lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad \text{1. Spalte} = \text{1. Spalte} - \text{2. Spalte} \\
&= (3 - \lambda)(-\lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 + \lambda & -\lambda \end{vmatrix} \quad \text{2. Zeile} = \text{2. Zeile} + \text{1. Zeile} \\
&= (3 - \lambda)(-\lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda)(-\lambda)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte von A zu 0, 1, 2, 3 und es gilt

$$\rho(A) = 3.$$

Nun zu den Eigenwerten von $A^T A$.

$$\begin{aligned}
 A^T A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & -6 & 11 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 11 \end{pmatrix} \\
 \det(A^T A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17-\lambda & -6 & 11 \\ 0 & -6 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (9-\lambda) \begin{vmatrix} 17-\lambda & -6 & 11 \\ -6 & 6-\lambda & 0 \\ 11 & 0 & 11-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{1. Spalte} = \text{1. Spalte} \\ \quad + \text{2. Spalte} - \text{3. Spalte} \end{array} \\
 &= (9-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -6 & 11 \\ -\lambda & 6-\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 11-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{2. Zeile} = \text{2. Zeile} - \text{1. Zeile} \\ \text{3. Zeile} = \text{3. Zeile} + \text{1. Zeile} \end{array} \\
 &= (9-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -6 & 11 \\ 0 & 12-\lambda & -11 \\ 0 & -6 & 22-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (9-\lambda)(-\lambda)[(12-\lambda)(22-\lambda) - 66] = (9-\lambda)(-\lambda)[\lambda^2 - 34\lambda + 198] \\
 &= (9-\lambda)(-\lambda)(17 + \sqrt{91} - \lambda)(17 - \sqrt{91} - \lambda)
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte von $A^T A$ zu 0, 7.46, 9, 26.54 und es gilt

1/2

$$N_\rho(A) = \sqrt{26.54} = 5.15.$$

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sie das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \alpha & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dieses soll mit dem Gesamt- und dem Einzelschrittverfahren gelöst werden.

- (a) Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren für alle $\alpha \in (-3, 3)$ konvergiert. 1
- (b) Bestimmen Sie die Iterationsmatrix des Einzelschritt- und Gesamtschrittverfahrens in Abhängigkeit von α . 1
- (c) Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Einzel- und Gesamtschrittverfahrens für $\alpha = -1$ mit der Startnäherung $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. 1

Lösung:

- (a) Nach Satz 3.3 der Vorlesung ist zu zeigen, dass A diagonaldominant ist. Mit dem Zeilensummenkriterium folgt:

$$\sum_{j=2,3} |a_{1j}| \stackrel{!}{<} |a_{11}| : \quad |2| + |1| = 3 < 4 = |4| \quad \checkmark$$

$$\sum_{j=1,3} |a_{2j}| \stackrel{!}{<} |a_{22}| : \quad |\alpha| + |1| = |\alpha| + 1 < 4 = |-4| \text{ für } \alpha \in (-3, 3) \text{ erfüllt} \quad \checkmark$$

$$\sum_{j=1,2} |a_{3j}| \stackrel{!}{<} |a_{33}| : \quad |1| + |0| = 1 < 2 = |2| \quad \checkmark$$

1

(b) Für A gilt folgende Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} & & U \\ & D & \\ L & & \end{pmatrix} \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Iterationsmatrizen T_{ESV} bzw. T_{GSV} des ESV bzw. GSV gilt

$$T_{ESV} = -(D + L)^{-1}U \text{ bzw. } T_{GSV} = -D^{-1}(L + U).$$

Bestimmung der Inversen $(D + L)^{-1}$:

$$\begin{array}{l} D + L | I \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad | \cdot 1/4 \\ \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ \alpha & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | 2. \text{ Zeile} = 2. \text{ Zeile} - \alpha \cdot 1. \text{ Zeile} \\ | 3. \text{ Zeile} = 3. \text{ Zeile} - 1. \text{ Zeile} \end{array} \\ \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -\alpha/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1/4 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot -1/4 \\ | \cdot 1/2 \end{array} \\ \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha/16 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 1/2 \end{array} \longrightarrow I|(D + L)^{-1} \end{array}$$

Damit erhalten wir die Iterationsmatrizen wie folgt:

$$T_{ESV} = - \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ \alpha/16 & -1/4 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & -\alpha/8 & -\alpha/16 + 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix} \quad \boxed{1/2}$$

$$T_{GSV} = - \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ \alpha/4 & 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1/2}$$

(c) Die Iterationsvorschriften für das ESV bzw. das GSV lauten für $\alpha = -1$ und $\nu = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} x_{ESV}^{(\nu+1)} &= T_{ESV}x_{ESV}^{(\nu)} + g_{ESV} \text{ mit} \\ T_{ESV} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/8 & 5/16 \\ 0 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix} \text{ und} \\ g_{ESV} &= (D + L)^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/16 & -1/4 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ x_{GSV}^{(\nu+1)} &= T_{GSV}x_{GSV}^{(\nu)} + g_{GSV} \text{ mit} \\ T_{GSV} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und} \\ g_{GSV} &= D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit dem Startwert $x_{ESV}^{(0)} = x_{GSV}^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$ folgende Iterierten:

$$x_{ESV}^{(1)} = T_{ESV}x_{ESV}^{(0)} + g_{ESV} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x_{ESV}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/8 & 5/16 \\ 0 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/8 \\ -31/32 \\ 5/16 \end{pmatrix} \\
x_{ESV}^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/8 & 5/16 \\ 0 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/8 \\ -31/32 \\ 5/16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/32 \\ -131/128 \\ 19/64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.40625 \\ -1.0234375 \\ 0.296875 \end{pmatrix} \quad \boxed{1} \\
x_{GSV}^{(1)} &= T_{GSV}x^{(0)} + g_{GSV} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
x_{GSV}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
x_{GSV}^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/8 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -29/32 \\ 7/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ -0.90625 \\ 0.4375 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (mündlich)

Der für jede (m, n) -Matrix A existierende Zahlwert

$$N_p(A) := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

heißt der Vektornorm $\|\cdot\|_p$ zugeordnete (induzierte) Matrixnorm. Beispiele sind:

$$\begin{aligned}
\max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| &= N_S(A) \text{ zugeordnet zu } \|\cdot\|_1 \\
\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} &= N_\rho(A) \text{ zugeordnet zu } \|\cdot\|_2 \\
\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| &= N_\infty(A) \text{ zugeordnet zu } \|\cdot\|_\infty
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die zugeordnete Matrixnorm tatsächlich eine Matrixnorm ist.

Lösung:

Definitheit: für $A \neq 0$ gilt: $N_p(A) = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p > 0$, da mindestens ein $a_{jk} \neq 0$

Homogenität: $\alpha \in \mathbb{R} : N_p(\alpha A) = \max_{\|x\|_p=1} \|\alpha Ax\|_p = \max_{\|x\|_p=1} |\alpha| \|Ax\|_p = |\alpha| N_p(A)$

Dreiecksungleichung: $N_p(A+B) = \max_{\|x\|_p=1} \|(A+B)x\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax+Bx\|_p$
 $\leq \max_{\|x\|_p=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|_p=1} \|Bx\| = N_p(A) + N_p(B)$

Multiplikativität: Es gilt: $N_p(A) = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \Rightarrow N_p(A) \cdot \|x\|_p \geq \|Ax\|_p \quad \forall x$

Damit folgt: $\|(A \cdot B)x\|_p \stackrel{y:=Bx}{=} \|Ay\| \leq N_p(A) \cdot \|y\|_p = N_p(A) \cdot \|Bx\|_p \leq N_p(A) N_p(B) \|x\|_p$
 $\Rightarrow \frac{\|(A \cdot B)x\|_p}{\|x\|_p} \leq N_p(A) \cdot N_p(B) \quad \forall x$
 $\Rightarrow \max_{x \neq 0} \frac{\|(A \cdot B)x\|_p}{\|x\|_p} = N_p(A \cdot B) \leq N_p(A) \cdot N_p(B)$

□

Aufgabe 4: (mündlich)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.2 der Vorlesung, dass das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren konvergieren.

Lösung:

Satz 3.2: Das Iterationsverfahren $x^{(\nu+1)} = Tx^{(\nu)} + g$, $\nu = 0, 1, \dots$ konvergiert genau dann für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen einen Fixpunkt x^* , d.h. $x^* = Tx^* + g$, falls $\rho(T) < 1$ gilt ($\rho(T) = \max_j |\lambda_j[T]|$ Spektralradius).

Mit nichtsingulärem M gilt:

$$Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = \underbrace{M^{-1}N}_{=:T}x + \underbrace{M^{-1}b}_{=:g}$$

Es gilt nun: Suche Lösung x^* des LGS $Ax = b \Leftrightarrow$ Suche Fixpunkt x^* von $x^* = Tx^* + g$

| | ESV | GSV |
|----------------------|--|--|
| Iterationsvorschrift | $x^{(\nu+1)} = T_{ESV}x^{(\nu)} + g_{ESV}$ | $x^{(\nu+1)} = T_{GSV}x^{(\nu)} + g_{GSV}$ |
| $M; N$ | $M = L + D; N = -U$ | $M = D; N = -(L + U)$ |
| Iterationsmatrix | $T_{ESV} = -(L + D)^{-1}U$ | $T_{GSV} = -D^{-1}(L + U)$ |
| g | $g_{ESV} = (D + L)^{-1}b$ | $g_{GSV} = D^{-1}b$ |

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & U \\ & D & \\ L & & \end{pmatrix} = L + D + U$$

$$T_{GSV} = - \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/6 & \\ & & 1/4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/6 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Eigenwerte von T aus $\det(T - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$:

$$\begin{aligned} \det(T_{GSV} - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 2/3 & -\lambda & -1/6 \\ 0 & -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda \frac{1}{12} + \lambda \frac{1}{3} = \lambda \left[\frac{5}{12} - \lambda^2 \right] \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 0, \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{5}{12}} \\ \Rightarrow \rho(T_{GSV}) &= \sqrt{\frac{5}{12}} \approx 0.65 < 1 \end{aligned}$$

Damit konvergiert das GSV.

$$T_{ESV} = - \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Inversen von $(L + D)$:

$$L + D|I \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad |2. \text{ Zeile} = 2. \text{ Zeile} + 2 \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\rightarrow & 0 & 6 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
& 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1
\end{array} & |3. \text{ Zeile} = 3. \text{ Zeile} -1/3 \cdot 2. \text{ Zeile} \\
\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\rightarrow & 0 & 6 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
& 0 & 0 & 4 & -2/3 & -1/3 & 1
\end{array} & \begin{array}{l} | \cdot 1/2 \\ | \cdot 1/6 \\ | \cdot 1/4 \end{array} \\
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
\rightarrow & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/6 & 0 \\
& 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/12 & 1/4
\end{array} & \rightarrow I|(D+L)^{-1} \\
\Rightarrow T_{ESV} = - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ -1/6 & -1/12 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/12 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Bestimmung der Eigenwerte von T_{ESV} :

$$\begin{aligned}
\det(T_{ESV} - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 - \lambda & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/12 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1/3 - \lambda & -1/6 \\ -1/6 & 1/12 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left[\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) \left(\frac{1}{12} - \lambda\right) - \frac{1}{36} \right] \\
&= -\lambda \left[\frac{1}{36} - \frac{5}{12}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{36} \right] = -\lambda \cdot \lambda \left[\lambda - \frac{5}{12} \right] \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0; \lambda_3 = \frac{5}{12} \\
\rho(T_{ESV}) &= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

Damit konvergiert auch das Einzelschrittverfahren! □

Aufgabe 5: (mündlich)

Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ so, dass PA eine LR -Zerlegung besitzt, und berechnen Sie diese LR -Zerlegung.
- (b) Lösen Sie mit Hilfe der Zerlegung $PA = LR$ aus Aufgabenteil (a) das LGS $Ax = b$.
- (a) Gesucht P, L, R mit $PA = LR$, $P =$ Permutationsmatrix, $L =$ untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen, $R =$ obere Dreiecksmatrix. Berechnung mit **Gauß-Elimination**:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -1 & 3 \\
-2 & 4 & 5 & 1 \\
-2 & 1 & 4 & 3 \\
0 & 3 & -2 & 1
\end{array} & \begin{array}{l} \\ |2. \text{ Zeile} = 2. \text{ Zeile} -2 \cdot \text{ Zeile} \\ |3. \text{ Zeile} = 3. \text{ Zeile} -2 \cdot \text{ Zeile} \end{array} \\
\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -1 & 3 \\
\Rightarrow L^{(1)} A^{(1)} = & \mathbf{2} & 0 & 7 & -5 \\
& \mathbf{2} & -3 & 6 & -3 \\
& \mathbf{0} & 3 & -2 & 1
\end{array} & | \text{Vertausche 2. und 4. Zeile} \\
\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -1 & 3 \\
\Rightarrow P^{(2)} A^{(2)} = P^{(2)} L^{(1)} A^{(1)} = & \mathbf{0} & 3 & -2 & 1 \\
& \mathbf{2} & -3 & 6 & -3 \\
& \mathbf{2} & 0 & 7 & -5
\end{array} & |3. \text{ Zeile} = 3. \text{ Zeile} + 2. \text{ Zeile} \\
\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -1 & 3 \\
\Rightarrow L^{(2)} A^{(3)} = L^{(2)} A^{(2)} = & \mathbf{0} & 3 & -2 & 1 \\
& \mathbf{2} & \mathbf{1} & 4 & -2 \\
& \mathbf{2} & \mathbf{0} & 7 & -5
\end{array} & |4. \text{ Zeile} = 4. \text{ Zeile} - \frac{7}{4} \cdot 3. \text{ Zeile}
\end{array}$$

$$\xrightarrow{L^{(3)}} A^{(4)} = L^{(3)}A^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -7/4 & -3/2 \end{pmatrix}$$

mit

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit geht das LGS $Ax = b$ über in das LGS

$$L^{(3)}L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}Ax = L^{(3)}L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}b.$$

Die Matrizen der Zerlegung $PA = LR$ sind dann gegeben durch:

$$L = P^{(2)}(L^{(1)})^{-1}P^{(2)}(L^{(2)})^{-1}(L^{(3)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = L^{(3)}L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$P = P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \xrightarrow{PA=LR} LRx = Pb \xrightarrow{y:=Rx} Ly = Pb$$

(1) Löse $Ly = Pb =: \tilde{b}$ mit $Pb = P(5, 9, 10, 2)^\top = (5, 2, 10, 9)^\top = \tilde{b}$

(2) Löse $Rx = y$

$$(1) \quad Ly = \tilde{b} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 10 - 2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 2 \\ y_4 = 9 - 2 \cdot y_1 - 7/4 \cdot y_3 = -9/2 \end{cases}$$

$$(2) \quad Rx = y \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ -9/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (5 - 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2)/(-1) \\ x_2 = (2 - 1 \cdot x_4 + 2 \cdot x_3)/3 = 1 \\ x_3 = (2 + 2 \cdot x_4)/4 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = (4, 1, 2, 3)^\top$$