UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. H. Stoll

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen - SS 2005

Lösungen zum 1. Übungsblatt — 15. April 2005

Aufgabe 1: **Lösung:**

(a) (a) $f \in C^1[0, \frac{1}{2}]$, $f'(x) = \frac{4}{7}\cos 4x$, $|f'(x)| \le f'(0) = \frac{4}{7}\cos 0 = \frac{4}{7} \overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} L = \frac{4}{7}$ $\boxed{1}$

(b) $|f(x) - f(y)| = |5 - \frac{1}{5}|x| - 5 + \frac{1}{5}|y|| = \frac{1}{5}||y| - |x|| \le \frac{1}{5}|x - y|$ (Gleichheit für $x = 1, y = 0$) $\Rightarrow L = \frac{1}{5}$ $\boxed{1}$

(c) $f \in C^1[1, 2]$, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3x^2}$, $|f'(x)| \le f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{6-1}{12} = \frac{5}{12} \overset{\text{MWS}}{\rightarrow} L = \frac{5}{12}$ $\boxed{1}$

(b) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$
Annahme: $\exists L > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \, \forall x, y \in [a, b] = [0, 1]$
Sei $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{4n}$ ($n \in \mathbb{N}$ beliebig)
Dann gilt $|f(x_n) - f(y_n)| \le L|x_n - y_n| \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} \le L \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{n} \Rightarrow L \ge \frac{2}{3}\sqrt{n}$. n beliebig, d.h. $L \ge \frac{2}{3}\sqrt{n} \, \forall n \in \mathbb{N}$
Widerspruch (wegen $\frac{2}{3}\sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) ✓ $\boxed{1}$

Aufgabe 2: **Lösung:**

(a) Zu zeigen sind die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

(1) I abgeschlossen
(2) f Abbildung in sich, d.h. $f(I) \subseteq I$
(3) f Kontraktion, d.h. $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ mit $L < 1$

(1) $I = [1, 2]$ ✓
(2) $f(I) \subseteq I$: Wir zeigen: f ist monoton fallend und $2 > f(1) > f(2) > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x = \underbrace{-\frac{1}{8}x}_{<0}\underbrace{\left[1 + \frac{1}{2}x^2\right]}_{>0} < 0 \quad \forall x \in [1, 2]$$

Damit ist f in $[1, 2]$ monoton fallend. Nun gilt

$$2 > f(1) = 1,921875 > 1,5 = f(2) > 1$$

und damit ist $f([1, 2]) \subset [1, 2]$. ✓ $\boxed{1/2}$

(3) zu zeigen: $\max_{x\in[1,2]} |f'(x)| =: L < 1$:

$$\max_{x\in[1,2]} |f'(x)| = \max_{x\in[1,2]} \left|-\frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x\right| = \frac{1}{8}\max_{x\in[1,2]} \left|\frac{1}{2}x^3 + x\right| = \frac{1}{8}\left|\frac{2^3}{2} + 2\right| = \frac{3}{4} =: L < 1 \qquad ✓\boxed{1/2}$$

Damit sind alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, weswegen f genau einen Fixpunkt x^* in $I = [1, 2]$ besitzt und die Iteration $x_n = f(x_{n-1})$ für $n = 1, 2, \ldots$ für jedes $x_0 \in I$ gegen x^* konvergiert

(b)

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\\
x_1 &= f(x_0) = -\frac{1}{64}2^4 - \frac{1}{16}2^2 + 2 = \frac{3}{2}\\
x_2 &= f(x_1) = -\frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 1,780273438\\
x_3 &= f(x_2) = 1,644962148 \qquad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

Der maximale Fehler lässt sich mit Hilfe der **a-posteriori Schranke** bestimmen

$$\begin{aligned}
&|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}\,|x_n - x_{n-1}|\\
n=3: \quad &|x_3 - x^*| \leq \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\,|x_3 - x_2| = 3\,|-0,13531129| = 0,40593387 \qquad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

(c) Für die Anzahl der Iterationsschritte n sollte gelten (**a-priori Schranke**):

$$\begin{aligned}
|x_n - x^*| &\leq \frac{L^n}{1-L}\,|x_1 - x_0| = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\left|\frac{3}{2} - 2\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 2 \overset{!}{\leq} 10^{-3}\\
&\Rightarrow n \geq \log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{2000} = \frac{\ln 0,0005}{0,75} = 26,42118918 \qquad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

Es müssen mindestens $n = 27$ Iterationsschritte durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ garantieren zu können. $\boxed{1/2}$

(d) Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle von $g(x)$ lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

In unserem Fall ist

$$g(x) = f(x) - x = -\frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{16}x^2 - x + 2. \qquad \boxed{1/2}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\\
x_1 &= x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{12}{7} = 1,714285714\\
x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = 1,692768623\\
x_3 &= x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = 1,692666013 \qquad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: **Lösung:**

(a) Zu zeigen: Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

(a) I abgeschlossen

(b) F Abbildung in sich, d.h. $F(I) \subseteq I$

(c) F Kontraktion, d.h. $\left\| F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\| \leq L \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\|$

(a) $I = [0,1]^2$ ✓

(b) $\frac{1}{4} - \frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{25}y^2$ bzw $\frac{1}{4} - \frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{10}y^2$ sind auf $[0,1]^2$ monoton fallend in x und y. Somit gilt

$$0 \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{20}1^2 - \frac{1}{25}1^2 = \frac{4}{25} \leq \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20}0^2 - \frac{1}{25}0^2 \leq 1$$
$$0 \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{20}1^2 - \frac{1}{10}1^2 = \frac{1}{10} \leq \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20}0^2 - \frac{1}{10}0^2 \leq 1$$

Damit gilt $F(I) \subseteq I$, d.h. F bildet F in sich ab. ✓

(c) Wähle max-Norm: $\|x\|_\infty$:

$$\begin{aligned}
\left\| F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \max_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \in I} \left\{ \left| \frac{1}{20}(\tilde{x}^2 - x^2) + \frac{1}{25}(\tilde{y}^2 - y^2) \right|, \left| \frac{1}{20}(\tilde{x}^2 - x^2) + \frac{1}{10}(\tilde{y}^2 - y^2) \right| \right\} \\
&= \max \left\{ \left| \frac{1}{20}(\tilde{x} - x)(\tilde{x} + x) + \frac{1}{25}(\tilde{y} - y)(\tilde{y} + y) \right|, \left| \frac{1}{20}(\tilde{x} - x)(\tilde{x} + x) + \frac{1}{10}(\tilde{y} - y)(\tilde{y} + y) \right| \right\} \\
&\leq \max \{ |\tilde{x} - x|, |\tilde{y} - y| \} \cdot \max \left\{ \left| \frac{1}{20}(\tilde{x} + x) + \frac{2}{50}(\tilde{y} + y) \right|, \left| \frac{1}{20}(\tilde{x} + x) + \frac{1}{10}(\tilde{y} + y) \right| \right\} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\|_\infty \cdot \max \left\{ \left| \frac{1}{10} + \frac{2}{25} \right|, \left| \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right| \right\} = \frac{3}{10} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\|_\infty
\end{aligned}$$

Damit ist F Kontraktion mit Kontraktionszahl $L = \frac{3}{10}$. ✓

(b)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24832 \\ 0.24772 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.244679 \\ 0.2411894 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Fehlerabschätzungen

(a) (a-posteriori) zur Abschätzung des Fehlers nach zwei Iterationsschritten

$$\begin{aligned}
\left| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_\infty &\leq \frac{L}{1-L} \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{0.3}{0.7} \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} \\
&= \frac{3}{7} \max\{|0.08832|, |0.14772|\} = 0.063308571
\end{aligned}$$

(b) (a-priori) zur Abschätzung der Anzahl der Iterationen

$$\left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \frac{L^n}{1-L} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty \overset{!}{\leq} 10^{-8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{L^n}{1-L} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty &= \left(\frac{3}{10}\right)^n \frac{10}{7} \max\{|x_1 - x_0|, |y_1 - y_0|\} = \left(\frac{3}{10}\right)^n \frac{10}{7} \max\{|0.84|, |0.9|\} \\
&= \left(\frac{3}{10}\right)^n \frac{10}{7} \frac{9}{10} \overset{!}{\leq} 10^{-8} \\
\Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{3}{10}\right)^n &\leq \log_{10} \left(10^{-8} \frac{7}{9}\right) \\
\Leftrightarrow n \log_{10} \left(\frac{3}{10}\right) &\leq -8 + \log_{10} \left(\frac{7}{9}\right) \\
\Leftrightarrow n &\geq \frac{-8 + \log_{10}\left(\frac{7}{9}\right)}{\log_{10}\left(\frac{3}{10}\right)} = 15.50865194
\end{aligned}$$

Nach spätestens $n = 16$ Iterationsschritten ist der Fehler kleiner als 10^{-8}.

(c) Das Newton-Verfahren dient zur Lösung von $G(x) = 0$:
Startwert $x^{(0)}$
$\nu = 0, 1, 2, \cdots : x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - \left[J_G(x^{(\nu)})\right]^{-1} \cdot G(x^{(\nu)})$
Berechnung von $x^{(\nu+1)}$ über Lösung eines linearen Gleichungssystems (zur Vermeidung der Berechnung der Inversen der Jacobimatrix J_G):
$J_G(x^{(\nu)})[\underbrace{x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}}_{=:z^{(\nu)}}] = -G(x^{(\nu)})$
Löse $J_G(x^{(\nu)})\, z^{(\nu)} = -G(x^{(\nu)})$
Berechne $x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + z^{(\nu)}$
Umformulierung des Fixpunktproblems $F(x) = x$ in ein Nullstellenproblem für G: $G(x) = x - F(x) = 0$:

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{4} + \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{25}y^2 \\ y - \frac{1}{4} + \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{10}y^2 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix

$$J_G(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{10}x & \frac{2}{25}y \\ \frac{1}{10}x & 1 + \frac{1}{5}y \end{pmatrix}$$

Newton-Schritt: $\nu = 0$, $x^{(0)} = (0, 0)^\top$

$$J_G(x^{(0)})z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{10} & \frac{2}{25} \\ \frac{1}{10} & 1 + \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} = -G(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{25} \\ -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} - \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{25} \\ -\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{LGS lösen: } \begin{array}{cc|c} \frac{11}{10} & \frac{2}{25} & -\frac{21}{25} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{9}{10} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} \frac{11}{10} & \frac{2}{25} & -\frac{21}{25} \\ 0 & \frac{6}{5} - \frac{2}{25\cdot 11} & -\frac{9}{10} + \frac{21}{25\cdot 11} \end{array}$$

$$\Rightarrow z^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{117}{164} \\ -\frac{453}{656} \end{pmatrix}, x^{(1)} = z^{(0)} + x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{47}{164} \\ \frac{203}{656} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.29 \\ 0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.244679 \\ 0.2411894 \end{pmatrix}$$

Deutlich bessere Näherung an die Lösung nach einem Iterationsschritt als beim Iterationsverfahren nach dem Banachschen Fixpunktsatz!

Aufgabe 4: **Lösung:**

(a) Newton-Verfahren zur Lösung von $g(x) = 0$:
Aus $x = a^{1/k}$ folgt $x^k = a$ und damit $g(x) = x^k - a$ und $g'(x) = kx^{k-1}$. Damit erhalten wir die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren in der Form:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{kx_n^k - x_n^k + a}{kx^{k-1}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_n + \frac{1}{k}\frac{a}{x_n^{k-1}}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) x_n + \frac{1}{3}\frac{2}{x_n^{3-1}} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3}\frac{1}{x_n^2} \\ x_0 &= 1 \\ x_1 &= \frac{2}{3}x_0 + \frac{2}{3}\frac{1}{x_0^2} = \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\frac{1}{1^2} = \frac{4}{3} \\ x_2 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}\frac{1}{x_1^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{91}{72} = 1.2638 \end{aligned}$$

Exakte Lösung $2^{1/3} \approx 1.25992105$

Aufgabe 5: (mündlich)

Gegeben sei die Folge

$$\begin{aligned} s_0 &= 0 \\ s_n &= \sqrt{2 + s_{n-1}},\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Folge gegen $s^* = 2$ konvergiert.

Lösung:

Definiere eine Fixpunktiteration durch

$$s_n = f(s_{n-1}) = \sqrt{2 + s_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

mit Startwert $s_0 = 0$. Der Fixpunkte der Funktion f ist der Grenzwert der Folge (s_n).

Überprüfe die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für

$$f : D \to \mathbb{R},\ D = [0, 2],\ f(s) = \sqrt{2 + s}$$

(a) D ist abgeschlossen ✓

(b) f ist streng monoton wachsend, da $f'(s) > 0$ für alle $s \in D$ und

$$0 \le f(0) = \sqrt{2} < 2 = f(2) \le 2,$$

damit ist $f(D) \subseteq D$, d.h. f ist Selbstabbildung. ✓

(c) zu zeigen: $\max_{s \in D} |f'(s)| \le L < 1$
Mit $f'(s) = \frac{1}{2\sqrt{2+s}}$ folgt $\max_{s\in D} |f'(s)| = \max_{s\in[0,2]} \frac{1}{2\sqrt{2+s}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} =: L < 1$ ist f nach dem MWS Kontraktin mit Kontraktionszahl $L = \frac{1}{2}$. ✓

Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt, d.h. die Fixpunktiteration konvergiert gegen den Fixpunkt der Funktion $f(s) = \sqrt{2 + s}$ in $[0, 2]$.

Es gilt damit: $s^* = f(s^*) = \sqrt{2 + s^*} \Rightarrow s^{*2} = 2 + s^* \Rightarrow s^{*2} - s^* - 2 = 0 \Rightarrow s^* = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$ und da $-1 \notin D$ folgt $s^* = 2$ und damit dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = 2$