UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. H. Stoll

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen
SS 2005

1. Übungsblatt — 15. April 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Bestimmen Sie (möglichst kleine) Lipschitzkonstanten zu

  (a) $f(x) = 8 + \frac{1}{7}\sin 4x,\ I = [0, \frac{1}{2}\pi]$
  (b) $f(x) = 5 - \frac{1}{5}|x|,\ I = [-2, 2]$
  (c) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3\,x},\ I = [1, 2]$

(b) Zeigen Sie, dass zu $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ keine Lipschitzkonstante existiert.

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{64}\,x^4 - \frac{1}{16}\,x^2 + 2$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[1, 2]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_n = f(x_{n-1})$ für $n = 1, 2, \ldots$ für jeden Startwert $x_0 \in [1, 2]$ gegen x^* konvergiert.

(b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ drei Iterationsschritte obiger Iteration durch und geben Sie eine Fehlerabschätzung für $x_3 - x^*$ an.

(c) Wie viele Iterationsschritte $x_n = f(x_{n-1})$ müssen ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ mindestens durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ garantieren zu können?

(d) Berechnen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens drei Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teil (b).

Aufgabe 3: (mündlich)

Gegeben sei die Funktion

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{25}y^2 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{10}y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass F in $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x, y \leq 1 \right\}$ einen eindeutigen Fixpunkt $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ besitzt, und dass das Iterationsverfahren $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ für $n = 1, 2, \ldots$ für beliebiges $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in I$ gegen diesen Fixpunkt konvergiert.

(b) Führen Sie mit dem Startwert $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Schritte des Iterationsverfahrens aus (a) durch und schätzen Sie den Fehler $\left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_\infty$ ab. Nach wievielen Iterationsschritten kann $\left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq 10^{-8}$ garantiert werden?

(c) Führen Sie zum Vergleich einen Newtonschritt zur Berechnung von $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ausgehende vom Startwert $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch.

Aufgabe 4: (mündlich)

(a) Erstellen Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung von $a^{1/k}$ $(a > 0)$.

(b) Berechnen Sie zwei Schritte für $a = 2$ und $k = 3$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$.

Aufgabe 5: (mündlich)

Gegeben sei die Folge

$$\begin{aligned} s_0 &= 0 \\ s_n &= \sqrt{2 + s_{n-1}},\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Folge gegen $s^* = 2$ konvergiert.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 28. April 2005, 14:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik für Informatiker“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30) gegenüber von Zimmer 112.
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name, Matrikelnummer und Teilnehmernummer und heften Sie die Blätter zusammen.