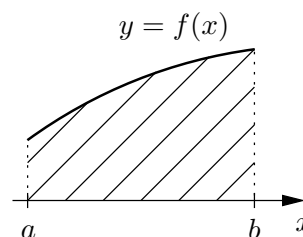


7 Quadraturverfahren

$$f \in C[a, b] : If = \int_a^b f(x) dx$$

Stammfunktion $If = F(b) - F(a)$ meistens nicht geschlossen darstellbar (z.B. $f(x) = e^{-x^2}$)



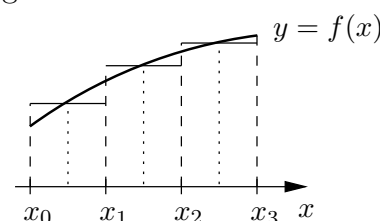
Aufgabe: Berechne Näherung N mit $|If - N| < \varepsilon$ (z.B. $\varepsilon = 10^{-4}$).

Effizienter Algorithmus, wenn die Forderungen "Verfahrensvorschrift, Fehlerschranke, Stabilität und Aufwand" entsprechend gut erfüllt sind.

- Riemann- Σ

$$\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j), \text{ Fehler } O\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty),$$

Genauigkeit $10^{-4} \rightarrow 10^4$ Funktionsauswertungen.



lineare Funktionale $I, Q, R : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$If = Qf + Rf, \quad Qf = \sum_{j=1}^n w_j f(\xi_j), \quad w_j \in \mathbb{R}, \quad \text{Fehler } Rf$$

Definition: Die Quadraturformel $If = Qf + Rf$ besitzt den *Exaktheitsgrad* m , falls $Rf = 0$ für alle $f \in \mathcal{P}_m$ gilt.

Beachte: Vandermonde-System $Ih_\nu = \sum w_j x_j^\nu$ ($h_\nu(x) = x^\nu$, $\nu = 0, 1, \dots, m$); es wird mindestens $m = 0$ gefordert (d.h. Exaktheit für konstante Funktionen)!

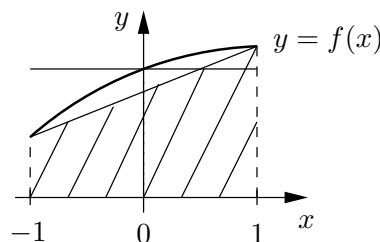
Elementare Formeln (geometrische Überlegungen) Intervall $[-1, 1]$

- Trapez-Regel ($m = 1$):

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1) - \frac{2}{3} f''(\xi)$$

- Mittelpunkt-Regel ($m = 1$):

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \cdot f(0) + \frac{1}{3} f''(\xi)$$



- Kepler-Regel ($m = 3$):

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \left\{ f(-1) + 4f(0) + f(1) \right\} - \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Die Zwischenstellen $\xi \in (-1, 1)$ sind jeweils verschieden und nicht bekannt.

Die Regeln bezüglich des Intervalls $[a, b]$ lauten entsprechend!

Zusammengesetzte Quadraturformeln

Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle und n -malige Anwendung der Quadraturformel:

- Trapez- Σ ($m = 1$): $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x) dx = h \left\{ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right\} + R_n f$$

$$\text{mit } R_n f = -\frac{(b-a)^3}{12} \frac{1}{n^2} f''(\xi) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

- Mittelpunkt- Σ ($m = 1$): $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x) dx = h \left\{ f\left(a + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right) \right\} + R_n f$$

$$\text{mit } R_n f = \frac{(b-a)^3}{24} \frac{1}{n^2} f''(\xi) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

- Kepler-Simpson- Σ ($m = 3$): $2h = \frac{b-a}{n}$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \left\{ f(a+h) + f(a+3h) + \cdots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(a+(2n-1)h) \right\} + 2 \left\{ f(a+2h) + f(a+4h) + \cdots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(a+2(n-1)h) \right\} \right] + R_n f \end{aligned}$$

$$\text{mit } R_n f = -\frac{(b-a)^5}{2880} \frac{1}{n^4} f^{(4)}(\xi) = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Zwischenstellen $\xi \in (a, b)$ sind jeweils verschieden und nicht bekannt.

Beispiel

$$I f = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \quad \|f''\|_\infty \leq 2, \quad \|f^{(4)}\|_\infty \leq 14.$$

Trapez- Σ

$$|R_n f| \leq \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} 2 \leq 10^{-4}, \quad \text{also } n = 41, \text{ d.h. } 42 \text{ Funktionsauswertungen}$$

Kepler- Σ

$$|R_n f| \leq \frac{1}{2880} \frac{1}{n^4} 14 \leq 10^{-4}, \quad \text{also } n = 3, \text{ d.h. } 7 \text{ Funktionsauswertungen}$$

Ergebnis 7.1 *Zusammengesetzte Quadraturformeln sind konvergent, d.h. für $f \in C[a, b]$ gilt $R_n f \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.*

Interpolatorische Quadraturformeln

Integrand $f(x)$ durch Interpolationspolynom $p_f(x)$ bezüglich der Knoten x_1, \dots, x_s approximieren:

Lagrange-Darstellung

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \underbrace{p_f(x)} dx + Rf = \int_a^b \sum_{j=1}^s \ell_j(x) f(x_j) dx + Rf \\ &= \sum_{j=1}^s \underbrace{\int_a^b \ell_j(x) dx}_{=:w_j} f(x_j) + Rf. \end{aligned}$$

Definition: Eine Quadraturformel $I f = Q f + R f$ heißt *interpolatorisch*, falls die Gewichte durch $w_j = \int_a^b \ell_j(x) dx$ gegeben sind.

Satz 7.2 Eine Quadraturformel mit s Knoten ist genau dann interpolatorisch, wenn ihr Exaktheitsgrad $s - 1$ beträgt.

Gauß-Quadraturformeln

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^s w_j f(x_j) + Rf$$

Quadraturformeln bezüglich einer Gewichtsfunktion $w(x)$

mit $w(x) \geq 0$, $\int_{-1}^1 w(x) dx < \infty$ (auch für unendliches Intervall)

Knoten $x_j =$ Nullstellen des entsprechenden Orthogonalpolynoms $p_s(x)$

Gewichte $w_j = \int_{-1}^1 w(x) \ell_j(x) dx$ (d.h. interpolatorisch)

Exaktheitsgrad $m = 2s - 1$

Orthogonalpolynome $\{p_s(x)\}_{s \geq 0}$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle_w := \int_{-1}^1 w(x) f(x) g(x) dx, \text{ d.h. } \langle p_m, p_n \rangle_w = 0, \text{ falls } m \neq n,$$

besitzen den genauen Grad s und die Nullstellen $-1 < x_1 < \dots < x_s < 1$.

Beispiele

$w(x) = 1$ in $[-1, 1]$	\rightarrow Legendre-Polynome $P_s(x)$
$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $[-1, 1]$	\rightarrow Tschebyscheff-Polynome $T_s(x)$
$w(x) = e^{-x}$ in $[0, +\infty)$	\rightarrow Laguerre-Polynome $L_s(x)$
$w(x) = e^{-x^2}$ in $(-\infty, +\infty)$	\rightarrow Hermite-Polynome $H_s(x)$

Quadraturfehler

Idee: Fehler $Rf = c \cdot f^{(m+1)}(\xi)$ ($a < \xi < b$), Exaktheitsgrad m

Satz 7.3 (Satz von Peano) Seien $f \in C^{m+1}[a, b]$ und $If = Qf + Rf$ eine Quadraturformel mit Exaktheitsgrad m . Dann gilt

$$Rf = \int_a^b K(t) f^{(m+1)}(t) dt,$$

wobei

$$K(t) = \frac{1}{m!} R_x \left[(x-t)_+^m \right]$$

der Peano-Kern ist.

Falls der Kern kein Vorzeichenwechsel in $(-1, 1)$ besitzt, dann liefert der Mittelwertsatz der f -Rechnung die Darstellung: Fehler = Konstante \times Ableitung.

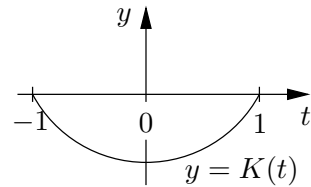
Beispiele

- Trapez-Regel ($m = 1$): Intervall $[-1, 1]$

$$K(t) = R_x \left[(x-t)_+^1 \right] = \frac{1}{2} (t-1)(t+1)$$

$K(t)$ besitzt kein VZW in $[-1, 1]$ (definit), also gilt für $-1 < \xi < 1$

$$Rf = \int_{-1}^1 K(t) dt \cdot f''(\xi) = -\frac{2}{3} f''(\xi)$$



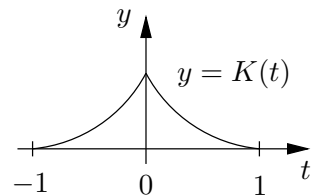
- Trapez- Σ : $b - a = nh$: $K_h(t) = \frac{1}{2}t(t-h)$, $\int_0^h K_h(t) dt = -\frac{h^3}{12}$

$$\int_a^b K(t) dt = n \int_0^h K_h(t) dt = -\frac{(nh)^3}{12} \frac{1}{n^2} = -\frac{(b-a)^3}{12} \frac{1}{n^2}$$

- Mittelpunktregel ($m = 1$): Intervall $[-1, 1]$

$$K(t) = \frac{1}{2}(1-|t|)^2$$

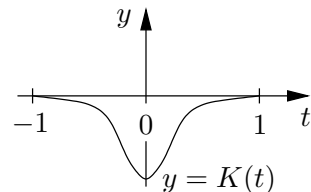
$$Rf = \int_{-1}^1 K(t) dt \cdot f''(\xi) = \frac{1}{3} f''(\xi)$$



- Kepler-Regel ($m = 3$): Intervall $[-1, 1]$

$$K(t) = -\frac{1}{72}(1+3t)(1-t)^3, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$K(t) = K(-t) \text{ (symmetrisch)}$$



Stabilität und Konvergenz

Fehlerfortpflanzung

Störung im Funktionswert $f(x)$ bzw. in der Funktionsauswertung $f(x_j)$:
absoluter Fehler

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \leq \varepsilon,$$

$$\tilde{f}(x_j) = f(x_j) + \varepsilon_j, \quad |\varepsilon_j| \leq \varepsilon.$$

Integral $I\tilde{f}$ statt If :

$$|I\tilde{f} - If| = |I(\tilde{f} - f)| \leq \|I\| \|\tilde{f} - f\|_\infty \leq K \cdot \varepsilon$$

mit Verstärkungsfaktor $K = M_0 = \int_a^b w(x) dx$ ($= b - a$ für $w(x) = 1$)

Quadraturformel $Q_s\tilde{f}$ statt Q_sf :

$$|Q_s\tilde{f} - Q_sf| = |Q_s(\tilde{f} - f)| \leq \|Q_s\| \|\tilde{f} - f\|_\infty \leq K \cdot \varepsilon,$$

Konditionszahl $K = \sum_{j=1}^s |w_j|$

Exaktheitsgrad $m = 0$ (Mindestforderung) genau dann,
falls $\sum w_j = M_0$.

Für positive Gewichte gilt $\|Q_s\| = \sum_{j=1}^s |w_j| = M_0 = \|I\|$.

Die zusammengesetzten Quadraturformeln (Mittelpunkt, Trapez, Kepler–Simpson, . . .) besitzen positive Gewichte und sind daher stabil.

Konvergenz

Bei Quadraturverfahren $\{Q_sf\}_{s \geq 1}$ stellt sich die Frage der Konvergenz:

$$f \in C[a, b] : Q_sf \rightarrow If \quad \text{für } s \rightarrow \infty ?$$

Bei positiven Gewichten ist die Folge der linearen Funktionale $\{Q_s\}_{s \geq 1}$ beschränkt, also auch die Folge $\{Q_sf\}_{s \geq 1}$. Daraus folgt die Konvergenz des Quadraturverfahrens nach dem Satz von Banach–Steinhaus (Funktionalanalysis).

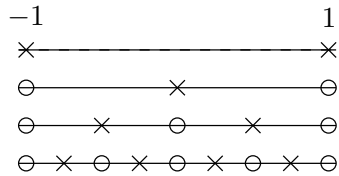
Ergebnis 7.4 *Quadraturverfahren $\{Q_sf\}_{s \geq 1}$ mit positiven Gewichten sind stabil und konvergent.*

Das Romberg–Verfahren

Idee: Fehlerkompensation durch geeignete Kombination der Trapez– Σ und damit Konvergenzbeschleunigung; entsprechende Deutung als Extrapolation möglich.

Intervallunterteilung: Halbierung der Gitterweite

→ bereits berechnete Funktionswerte weiterverwenden



Bezeichnung: $n \times U$ mit $U \in \{T, M, K\}$ bedeutet, dass die entsprechende Regel (Trapez–, Mittelpunkt–, Kepler–Regel) n -mal angewendet wird.

$$\begin{array}{ll}
 1 \times T : & If = f(-1) + f(1) - \frac{2}{3}f''(\xi) \quad \left| \cdot -\frac{1}{3} \right. \\
 2 \times T : & If = \frac{1}{2}f(-1) + f(0) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{6}f''(\xi) \quad \left| \cdot +\frac{4}{3} \right. \quad \left| \cdot -\frac{1}{3} \right. \\
 4 \times T : & If = \frac{1}{2}(2 \times T) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right)}_{=2 \times M} - \frac{1}{24}f''(\xi) \quad \left| \cdot +\frac{4}{3} \right. \\
 & \vdots \\
 2^k \times T : & If = \frac{1}{2}(2^{k-1} \times T) + \frac{1}{2}(2^{k-1} \times M) - \frac{(b-a)^3}{12} \frac{1}{2^{2k}} f''(\xi) \quad \left| \cdot -\frac{1}{3} \right. \\
 2^{k+1} \times T : & If = \frac{1}{2}(2^k \times T) + \frac{1}{2}(2^k \times M) - \frac{(b-a)^3}{12} \frac{1}{4 \cdot 2^{2k}} f''(\xi) \quad \left| \cdot +\frac{4}{3} \right.
 \end{array}$$

Es gilt durch Kombination:

$$\begin{array}{l}
 \frac{4(2 \times T) - (1 \times T)}{3} = 1 \times K; \quad \text{Fehler} = \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi) \\
 \frac{4(4 \times T) - (2 \times T)}{3} = 2 \times K; \quad \text{Fehler} = \frac{1}{90} \frac{1}{16} f^{(4)}(\xi) \\
 \frac{16(2 \times K) - (1 \times K)}{15} = \text{Quadraturformel mit } s = m = 5.
 \end{array}$$

Anmerkung: Die Trapez– Σ besitzt die asymptotische Fehlerentwicklung

$$If - (n \times T) = c_2 h^2 + c_4 h^4 + c_6 h^6 + \dots \quad (h \rightarrow 0), \quad h = \frac{b-a}{n},$$

d.h. Entwicklung in h^2 -Potenzen.

Extrapolation für $h \rightarrow 0$ (Richardson-Extrapolation)

Sei $h := \frac{b-a}{n}$, $T(h) := n \times T$.

$T(h)$ approximiert If umso besser,

je kleiner h ist: $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = If$.

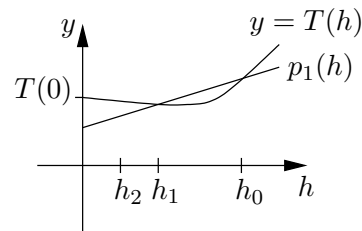
In der Praxis kann h nicht beliebig klein gewählt werden (wegen Aufwand und Rundungsfehlern).

Interpoliere $T(h)$ bezüglich der Knoten

$$h_0 > h_1 > \dots > h_k$$

mit Interpolationspolynom $p_k(h)$:

$p_k(0)$ approximiert $T(0) = If$ besser als $T(h_k)$.



Rekursive Berechnung von $p_k(0)$ in einem Schema ohne das Polynom explizit aufzustellen: die spaltenweise Kombination bedeutet Interpolation mit 2 Knoten, dann 3 Knoten, usw. (vgl. Schema von Aitken-Neville).

Romberg-Verfahren

Schrittweitenfolge $h_0 = b - a$, $h_n = \frac{h_0}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$

Bezeichnungen: Trapez- Σ $T_{0,n} := h_n \sum_{j=0}^{2^n} f(a + jh_n)$

Abkürzung Σ'' : erster und letzter Summand werden halbiert

Fehler $If - T_{0,n} = -\frac{(b-a)^3}{12} \frac{1}{2^{2n}} = O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$ ($n \rightarrow \infty$).

$$\begin{array}{l} T_{0,n} \\ \quad \rangle \\ T_{0,n+1} \\ \quad \rangle \\ T_{0,n+2} \\ \quad \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} T_{1,n} := \frac{4T_{0,n+1} - T_{0,n}}{3} \\ \\ T_{1,n+1} := \frac{4T_{0,n+2} - T_{0,n+1}}{3} \\ \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \rangle \\ T_{2,n} := \frac{16T_{1,n+1} - T_{1,n}}{15} \\ \\ \\ \end{array}$$

Konvergenzbeschleunigung

durch wiederholte Transformation der entstehenden Folgen:

$$\begin{array}{ll} \text{Trapez-}\Sigma: & T_{0,0}, T_{0,1}, T_{0,2}, \dots \\ \text{neue Folge:} & T_{1,0}, T_{1,1}, T_{1,2}, \dots \\ \text{usw.} & T_{2,0}, T_{2,1}, T_{2,2}, \dots \end{array}$$

Romberg–Schema (T–Tafel): Automatische Integration

Mit der Vorschrift

$$T_{m,n} := \frac{4^m T_{m-1,n+1} - T_{m-1,n}}{4^m - 1}, \quad m > 0$$

lässt sich aus der Trapez– Σ folgendes Schema aufbauen:

	$T_{0,0}$					
	$T_{0,1}$	$T_{1,0}$				
	$T_{0,2}$	$T_{1,1}$	$T_{2,0}$			
	$T_{0,3}$	$T_{1,2}$	$T_{2,1}$	$T_{3,0}$		
	$T_{0,4}$	$T_{1,3}$	$T_{2,2}$	$T_{3,1}$	$T_{4,0}$	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
Grad m :	1	3	5	7	9	\dots
Fehler:	$\frac{1}{2^{2n}}$	$\frac{1}{2^{4n}}$	$\frac{1}{2^{6n}}$	$\frac{1}{2^{8n}}$	$\frac{1}{2^{10n}}$	\dots

- Die *Durchführung* erfolgt zeilenweise.
 $T_{n,0}$ ist die beste Näherung in der betreffenden Zeile.
- *Aufwand*: Anzahl der Funktionsauswertungen bis zu $T_{n,0}$ entspricht denen in $T_{0,n}$, da zeilenweise keine Funktionsauswertungen hinzukommen, also $2^n + 1$.
- *Konvergenz*: Spaltenweise (da zusammengesetzte Quadraturformeln) und ebenso diagonalweise.
- Die *numerische Stabilität* ist gewährleistet (positive Gewichte).
- *Fehlerbetrachtungen*: Peano–Kerne sind definit

$$\begin{aligned} If - T_{m,n} &= 4^{-n(m+1)} c_m f^{(2m+2)}(\xi_{m,n}) \\ If - T_{m,0} &= c_m f^{(2m+2)}(\xi_{m,0}) \\ If - T_{m,1} &= 4^{-(m+1)} c_m f^{(2m+2)}(\xi_{m,1}) \end{aligned}$$

- *Fehlerschätzungen*

$$\begin{aligned} |If - T_{m,0}| &\approx |T_{m,1} - T_{m,0}| \\ |If - T_{m,1}| &\approx \frac{1}{4^{m+1}} |T_{m,1} - T_{m,0}| \end{aligned}$$

Näherung $T_{m+1,0}$ nochmals besser als $T_{m,1}$.

- *Abbrechkriterium*: Falls $|T_{m,1} - T_{m,0}| \cdot d_m \leq \varepsilon$ gilt, dann ist $T_{m+1,0}$ der gesuchte Näherungswert mit

$$|If - T_{m+1,0}| \leq \varepsilon,$$

wobei d_m geeigneter Dämpfungsfaktor ist (z.B. $d_m = \frac{1}{4^{m+1}}$).

Beispielblatt: Romberg-Verfahren

Aufgabe: Berechne $I = \int_a^b f(x)$ mit Genauigkeit ε

T-Tafel

$$\begin{array}{ll} T_{0,0} & T_{0,k} := h_k \sum_{j=0}^{2^k} f(a + jh_k), \quad h_k = (b-a)/2^k \\ T_{0,1} & T_{1,0} \\ T_{0,2} & T_{1,1} \quad T_{2,0} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \ddots \\ & T_{m,k} := \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1} \end{array}$$

Beispiele

$$1. \quad I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 = 0.693\ 147\ 180\dots$$

0.75

0.708... 0.694...0.697... 0.693 25... 0.693 17...0.694... 0.693 15... 0.693 148... 0.693 147 47...

$$|T_{2,1} - T_{2,0}| \leq 4 \cdot 10^{-5}, \quad |I - T_{2,0}| \leq 4 \cdot 10^{-5}, \quad |I - T_{3,0}| \leq 3 \cdot 10^{-7}$$

$$2. \quad I = \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746\ 8241\dots$$

0.68

0.731... 0.747 18...0.742 9... 0.746 855... 0.746 833...0.745 86... 0.746 826... 0.746 8242... 0.746 8241...

$$|T_{2,1} - T_{2,0}| \leq 10^{-5}, \quad |I - T_{2,0}| \leq 10^{-5}, \quad |I - T_{3,0}| \leq 10^{-7}$$

$$3. \quad I = \int_0^2 \frac{\sin x}{x} = 1.605\ 412\ 976\dots$$

1.454

1.468... 1.606 8...1.596... 1.605 49... 1.605 407...1.603... 1.605 418... 1.605 412 89... 1.605 412 986...

$$|T_{2,1} - T_{2,0}| \leq 6 \cdot 10^{-6}, \quad |I - T_{2,0}| \leq 6 \cdot 10^{-6}, \quad |I - T_{3,0}| \leq 10^{-8}$$

8 Trigonometrische Interpolation

Π_m Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq m$

Normalgestalt

$$\tau(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^m \{\alpha_\nu \cos \nu z + \beta_\nu \sin \nu z\}, \quad \alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{R}$$

periodisch d.h. $\tau(z + 2\pi) = \tau(z)$, Intervall $[-\pi, \pi)$ oder $[0, 2\pi)$

Dimension $\Pi_m = 2m + 1$

Basis $\{t_0, t_1, \dots, t_{2m}\} := \{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos mx, \sin mx\}$

Orthogonalität $\langle t_k, t_\ell \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t_k(x) t_\ell(x) dx = 0$ für $k \neq \ell$ ($k, \ell \leq 2m$)

Norm $\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2}$

Fourier-Reihe $f \sim \frac{\hat{\alpha}_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{\hat{\alpha}_\nu \cos \nu x + \hat{\beta}_\nu \sin \nu x\}$

Fourier-Polynom \hat{F}_k : k -tes Abschnittspolynom der Fourier-Reihe

Fourier-Koeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha}_\nu \\ \hat{\beta}_\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \begin{Bmatrix} \cos \nu x \\ \sin \nu x \end{Bmatrix} dx$$

Auswertung: Schnelle Fourier-Transformation (FFT) (siehe §9)

Minimaleigenschaft

$$f \in C_{2\pi} : \|f - \hat{F}_k\|_2 \leq \|f - \tau_k\|_2 \quad \text{für alle } \tau_k \in \Pi_k$$

d.h. \hat{F}_k ist beste AP zu f im Mittel

Exponentialdarstellung

Mit Transformation

$$z \mapsto \xi = e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow \xi \text{ auf Einheitskreis}$$

$$\text{folgt } \tau(z) = \sum_{\nu=-m}^m a_\nu e^{i\nu z}, \quad a_0 := \frac{\hat{\alpha}_0}{2}, \quad a_{\pm\nu} := \frac{\hat{\alpha}_\nu \mp i\hat{\beta}_\nu}{2},$$

$$\tau(z) = e^{-imz} \underbrace{\sum_{\nu=-m}^m a_\nu e^{i(\nu+m)z}}_{=:g(\xi)} = \underbrace{\xi^{-m}}_{\neq 0} \cdot g(\xi),$$

$g(\xi)$ algebraisches Polynom aus \mathcal{P}_{2m} .

Satz 8.1 Ein trigonometrisches Polynom m -ten Grades besitzt in $[0, 2\pi)$ höchstens $2m$ Nullstellen oder es verschwindet identisch.

Beweis: Zurückführung auf algebraisches Polynom:

$g \in \mathcal{P}_{2m}$ besitzt höchstens $2m$ Nullstellen auf dem Einheitskreis, also besitzt $\tau \in \Pi_m$ höchstens $2m$ Nullstellen auf $[0, 2\pi)$. \square

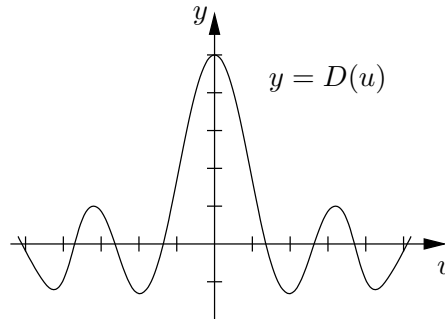
Hilfssatz 8.2 Sei

$$D(u) = \sum_{\nu=-m}^m e^{i\nu u} = 1 + 2 \cos u + \cdots + 2 \cos mu,$$

dann gilt

$$D(u) = \frac{\sin \frac{2m+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \quad (\text{Dirichlet-Kern}).$$

Beweis: [Ü]



Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Quadraturformel: Intervall $[0, 2\pi] \rightarrow 2m + 1$ Teilintervalle

Trapez- Σ : erster und letzter Summand halbiert (beachte $f(0) = f(2\pi)$)

Knoten $x_j = \frac{2j\pi}{2m+1}$, $j = 0, \dots, 2m$ (beachte $x_{2m+1} = 2\pi$)

Trapez- Σ = arithmetisches Mittel

Diskrete Orthogonalität:

$$\langle t_k, t_\ell \rangle_m := \underbrace{\frac{2}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} t_k(x_j) t_\ell(x_j)}_{\text{Trapez-}\Sigma} = 0 \quad \text{für } k \neq \ell \quad (k, \ell \leq 2m)$$

Norm in Π_m : $\|\tau\|_{2,m} := \langle \tau, \tau \rangle_m^{1/2}$

Diskretes Fourier-Polynom

$$F_k(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^k (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx), \quad 0 \leq k \leq m$$

Diskrete Fourier-Koeffizienten

$$\left. \begin{matrix} \alpha_\nu \\ \beta_\nu \end{matrix} \right\} = \frac{2}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} f(x_j) \begin{cases} \cos \nu x_j \\ \sin \nu x_j \end{cases}$$

Trigonometrische Interpolation

Periodische Vorgänge

alle Argumente sind "gleichwertig" \rightarrow äquidistante Knoten

Gegeben: Knoten $x_j = \frac{2j\pi}{2m+1}$, $j = 0, 1, \dots, 2m$

Daten $y_j \in \mathbb{R}$ (bzw. $y_j := f(x_j)$, $f \in C_{2\pi}$), $j = 0, 1, \dots, 2m$

Gesucht: Polynom $\tau \in \Pi_m$ mit $\tau(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, \dots, 2m$

Eindeutige Lösbarkeit: Homogenes Problem $\tau(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, 2m$ besitzt nur die triviale Lösung (Nullstellen).

Darstellung: Lagrange-Gestalt möglich (Theorie): $\ell_j(x) := \frac{1}{2m+1} D(x - x_j)$,
in Normalgestalt mit diskreten Fourier-Koeffizienten.

Satz 8.3 Das trigonometrische Interpolationspolynom bezüglich der $2m + 1$ äquidistanten Knoten besitzt die Darstellung

$$\tau_m(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^m \{\alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x\},$$

wobei α_ν, β_ν die diskreten Fourier-Koeffizienten sind.

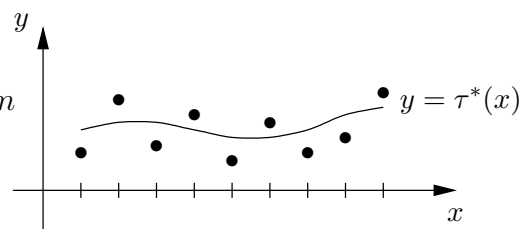
Beweisidee: Lagrange-Gestalt $\tau_m(x) = \sum_{j=0}^{2m} y_j \ell_j \Rightarrow$ Normalgestalt \square

Anmerkung: Interpolation mit $2m$ äquidistanten Knoten entsprechend durchführbar; $\sin mx$ fällt weg.

Ausgleichsproblem

Gegeben: Knoten $x_j = \frac{2j\pi}{2m+1}$, $j = 0, 1, \dots, 2m$

Daten $y_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, 2m$



Gesucht: $\tau^* \in \Pi_k$ ($k < m$) nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate

$$\text{d.h. } \sum_{j=0}^{2m} (y_j - \tau^*(x_j))^2 = \text{Minimum.}$$

Satz 8.4 Die Lösung τ^* des Ausgleichsproblems ist identisch mit dem diskreten Fourier-Polynom F_k und ebenso mit dem k -ten Abschnittspolynom des IP-Polynoms τ_m .

Anmerkung: Sehr einfache Lösung im Vergleich mit algebraischen Polynomen!

Beweis: Das IP-Polynom τ_m erfüllt $\tau_m(x_j) = y_j$ und die Minimaleigenschaft für das diskrete Fourierpolynom lautet

$$\tau_m \in \Pi_m : \|\tau_m - F_k\|_{2,m} \leq \|\tau_m - \tau_k\|_{2,m} \text{ f.a. } \tau_k \in \Pi_k \text{ (} k \leq m \text{);}$$

damit folgt die Behauptung. \square

Komplexes algebraisches Problem

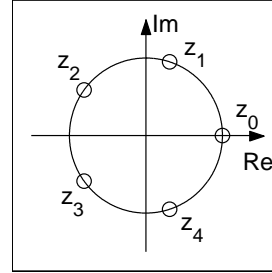
Transformation der Knoten

Knoten $x_j = \frac{2j\pi}{n}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

(äquidistant) \longrightarrow IP-Polynom $\tau(x)$

Knoten $z_j = e^{ix_j} = e^{\frac{2ij\pi}{n}}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

(äquidistant auf Einheitskreis)



Satz 8.5 Das komplexe algebraische IP-Polynom bezüglich der Knoten $z_j = e^{\frac{2ij\pi}{n}}$ und Daten \hat{y}_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, besitzt die Darstellung

$$S_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu z^\nu, \quad b_\nu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k z_\nu^{-k}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zusammenhang zum trigonometrischen Interpolationspolynom

Sei $n = 2m + 1$ und $\tau_m(x)$ das IP-Polynom, dann gilt

$$\tau_m(x) = z^{-m} S_n(z), \quad z = e^{ix}$$

Daten: $y_j = \tau_m(x_j) = z_j^{-m} S_n(z_j) = z_j^{-m} \hat{y}_j \longrightarrow \hat{y}_j = z_j^m y_j$

Erläuterungen: Transformation $z = e^{ix}$

$$\begin{aligned} \tau_m(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^m \{\alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x\} \\ &= \sum_{\nu=-m}^m a_\nu e^{i\nu x} = e^{-imx} \sum_{\nu=0}^{2m} a_{\nu-m} e^{i\nu x} \\ &= z^{-m} \sum_{\nu=0}^{2m} \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{2m} \hat{y}_k z_\nu^{-k} z^\nu \\ a_{\pm\nu} &= \frac{1}{2} (\alpha_\nu \mp i\beta_\nu) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{2m} y_k e^{\mp i\nu x_k} \\ a_{\nu-m} &= \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{2m} \underbrace{y_k z_k^m}_{\hat{y}_k} z_k^{-\nu} \quad \square \end{aligned}$$

Ergebnis 8.6 Konstruiere das komplexe algebraische IP-Polynom $S_n(z)$ (nach Satz 8.5) und gewinne daraus das trigonometrische IP-Polynom $\tau_m(x)$ durch die Rücktransformation $\tau_m(x) = z^{-m} S_n(z)$, $z = e^{ix}$, $n = 2m + 1$.