3 Lineare Gleichungssysteme

Normen
Messen der Größe eines Vektors bzw. einer Matrix

Vektornorm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

(1) $\|x\| > 0$ $(x \neq 0)$ (Definitheit),

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (Homogenität),

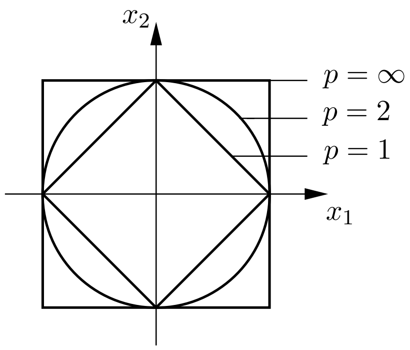
(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Beispiele

max–Norm $\|x\|_\infty := \max\limits_j |x_j|$,

ℓ_1–Norm $\|x\|_1 := \sum\limits_j |x_j|$,

Euklid–Norm $\|x\|_2 := \left(\sum\limits_j |x_j|^2\right)^{1/2}$.



Induzierte Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$.

Kugel mit Radius 1 um Null:

$K_p := \{x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_p \leq 1\}$

Matrixnorm $N(A)$: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

A auffassen als n Vektoren oder als Vektor mit n^2 Komponenten;
Matrizenring, also multiplikative Struktur.

Definition: Eine Abbildung $N : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ heißt *Matrixnorm*, falls gilt:

(1) $N(A) > 0 \quad (A \neq 0)$ (Definitheit),

(2) $N(\alpha A) = |\alpha| N(A)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (Homogenität),

(3) $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$ (Dreiecksungleichung),

(4) $N(AB) \leq N(A) \cdot N(B)$ (Multiplikativität).

Beispiele

Gesamtnorm $N_G(A) := n \max\limits_{j,k} |a_{jk}|$

Zeilen–$\sum$–Norm $N_Z(A) := \max\limits_j \sum\limits_{k=1}^n |a_{jk}|$

Spalten–$\sum$–Norm $N_S(A) := \max\limits_k \sum\limits_{j=1}^n |a_{jk}|$

Spektralnorm $N_\rho(A) := \sqrt{\rho(A^T A)}$

Spektralradius $\rho(A) := \max\limits_j |\lambda_j[A]|$ mit $\lambda_j[A]$ Eigenwert von A.
$\rho(A)$ ist keine Norm, aber es gibt Normen $N_\epsilon(\cdot)$, die beliebig nahe an $\rho(A)$ herankommen; für symmetrische Matrizen A gilt sogar $N_\rho(A) = \rho(A)$.

Definition: Eine Matrixnorm $N(\cdot)$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ heißen *verträglich*, falls gilt

$$\|Ax\| \leq N(A)\|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Kleinste obere Schranke (**l**east **u**pper **b**ound) wird mit lub–Norm bezeichnet.

lub–**Normen**: $lub_\infty(A) = N_Z(A),\ lub_1(A) = N_S(A),\ lub_2(A) = N_\rho(A)$.

Verträgliche Normen

zu $\|x\|_\infty$ sind $N_Z(A), N_G(A)$ verträglich
zu $\|x\|_1$ sind $N_S(A), N_G(A)$ verträglich
zu $\|x\|_2$ sind $N_\rho(A), N_G(A)$ verträglich

Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- *transponierte* bzw. *konjugiert–transpon.* Matrix: A^T bzw. $A^H := \bar{A}^T$
- *symmetrische* bzw. *hermitesche* Matrix: $A = A^T$ bzw. $A = A^H$
- *orthogonale* bzw. *unitäre* Matrix: $A^{-1} = A^T$ bzw. $A^{-1} = A^H$
- *ähnliche* Matrizen A und B: $A = TBT^{-1}$ für ein T.
- *positiv definite* bzw. *positiv semidefinite* Matrix:
  A hermitesch und $x^H Ax > 0$ bzw. ≥ 0 für alle $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$.

Lineares Gleichungssystem $Ax = b$

Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Vektor $b \in \mathbb{R}^m$
Gesucht: Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^n$
Eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ Rang(A) =Rang(A, b)

$m < n$: i.a. unendlich viele Lösungen (evtl. Nebenbedingungen)
$m > n$: überbestimmtes LGS, i.A. keine Lösung;
Ausgleichsrechnung: bestimme x, sodass $\|b - Ax\|$ =Minimum.
$m = n$: Homogenes System $b = 0$: nichttriviale Lösung $\Leftrightarrow$ Rang$(A) < n$.
Inhomogenes System $b \neq 0$: eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Inhomogenes System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn homogenes System nur die triviale Lösung besitzt.

Hier: **Inhomogenes** $(n \times n)$–**System** mit $\det A \neq 0$.

Iterationsverfahren

Iteration: Fixpunktform, Fixpunktsatz (vgl. §2):

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; x = Tx + g =: \varphi(x) \;\text{ mit geeigneten } T \text{ und } g$$

Iterationsfunktion: $\varphi : x \mapsto Tx + g,\; T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildung

Kontraktion: $\|Tx - Ty\| \leq N(T)\|x - y\|,\; N(T) =: L < 1$

Satz 3.1 *Vektornorm $\|\cdot\|$ und Matrixnorm $N(\cdot)$ seien verträglich. Falls $N(T) < 1$ ist, dann gilt:*

1. *Die Fixpunktgleichung $x = Tx + g$ besitzt genau eine Lösung x^*.*
2. *Die Folge $\{x^{(\nu)}\}_{\nu \geq 0}$ mit $x^{(\nu+1)} := Tx^{(\nu)} + g$, konvergiert für beliebigen Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen x^*.*
3. *Der Fehlervektor $e^{(\nu)} := x^* - x^{(\nu)}$ erfüllt die Abschätzungen:*
$$\|e^{(\nu)}\| \;\leq\; \frac{N(T)}{1-N(T)}\,\|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}\| \quad \text{(a–posteriori Abschätzung)},$$
$$\|e^{(\nu)}\| \;\leq\; \frac{\big(N(T)\big)^{\nu}}{1-N(T)}\,\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad \text{(a–priori Abschätzung)}.$$

Beweis: Banachscher Fixpunktsatz im $\mathbb{R}^n$. □

Hinreichendes Konvergenzkriterium: Matrixnorm $N(T) < 1$ (verschieden Normen führen zu verschiedenen Bedingungen).

Satz 3.2 *Das Iterationsverfahren $x^{(\nu+1)} = Tx^{(\nu)} + g,\; \nu = 0, 1, \ldots$ konvergiert genau dann für jedes $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen den Fixpunkt x^*, falls $\rho(T) < 1$ gilt.*

Beweisidee:
Hinreichend: Es existiert Matrixnorm N_ε mit $N_\varepsilon(T) \leq \rho(T) + \varepsilon < 1$.
Notwendig: Annahme $\rho(T) \geq 1$ und Fixpunkt x^* existiert $\Rightarrow$ Widerspruch! □

Gesamt– und Einzelschrittverfahren

LGS $Ax = b,\; A \in \mathbb{R}^{n\times n},\; b \in \mathbb{R}^n,\; \det A \neq 0$, o.B.d.A. $a_{jj} \neq 0,\; j = 1, \ldots, n$.
Gesucht: Äquivalente Fixpunktgleichung $x = Tx + g$ mit $\rho(T) < 1$.

Zerlegung: $A = M - N$, M nicht–singulärer Hauptteil von A; also

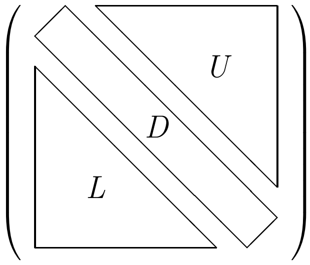
$$Mx = Nx + b \text{ impliziert } x = Tx + g \text{ mit } T := I - M^{-1}A \text{ und } g := M^{-1}b.$$

Heuristik: Sei λ EW zu A und m EW zu M;
dann $\frac{\lambda}{m}$ EW zu $M^{-1}A$ und $1 - \frac{\lambda}{m}$ EW zu $I - M^{-1}A = T$.
M Hauptteil von A, d.h. $m \approx \lambda$, also $\rho(T) \ll 1$.

Gesamtschrittverfahren (Jacobi–Verfahren)

Wähle $M = D = \operatorname{diag}(a_{jj})$:

$A =$



$= D + L + U$

Iterationsmatrix $T = I - D^{-1}A = -D^{-1}(L+U)$

Iteration $x^{(\nu+1)} := Tx^{(\nu)} + D^{-1}b,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots,$ Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Komponentenschreibweise

$$x_j^{(\nu+1)} := \frac{1}{a_{jj}} \left\{ -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{jk}x_k^{(\nu)} + b_j \right\},\ j = 1, \ldots, n,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Einzelschrittverfahren (Gauß–Seidel–Verfahren)

Idee: Berechnete Werte $x_1^{(\nu+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(\nu+1)}$ werden bei $x_j^{(\nu+1)}$ berücksichtigt!

Komponentenschreibweise

$$x_j^{(\nu+1)} := \frac{1}{a_{jj}} \left\{ -\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k^{(\nu+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k^{(\nu)} + b_j \right\}, j = 1, \ldots, n, \nu = 0, 1, \ldots$$

Zerlegung $M = D + L$ (L untere Dreiecksmatrix)

Iterationsmatrix $T = I - (D+L)^{-1}A = -(D+L)^{-1}U$

Inverse Matrix $(L+D)^{-1}$ umgehen (siehe Komponentenschreibweise).

Konvergenzkriterien

Hinreichend: $N(T) < 1$ für beliebige Matrix–Norm;
notwendig und hinreichend (Satz 3.2): $\rho(T) < 1$ (mit A ausdrücken).

Definition: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfüllt das

- *Zeilen–$\sum$–Kriterium*, wenn gilt

$$\max_j \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{jk}}{a_{jj}}\right| < 1 \quad \text{d.h.} \quad |a_{jj}| > \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{jk}|\ ,\ j = 1, \ldots, n;$$

- *Spalten–$\sum$–Kriterium*, wenn gilt

$$\max_j \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{kj}}{a_{jj}}\right| < 1 \quad \text{d.h.} \quad |a_{jj}| > \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{kj}|\ ,\ j = 1, \ldots, n.$$

Eine Matrix A heißt *diagonaldominant*, wenn das Zeilen– oder Spalten–$\sum$–Kriterium erfüllt ist.

Satz 3.3 *Das Gesamtschrittverfahren konvergiert für ein LGS mit diagonaldominanter Matrix.*

Beweis: Zeilen–$\sum$–Norm $N_Z(T) = N_Z(D^{-1}(L+U)) = \max\limits_j \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{jk}}{a_{jj}}\right| < 1.$ □

Satz 3.4 *Das Einzelschrittverfahren konvergiert für ein LGS mit Matrix A, falls das Zeilen–$\sum$–Kriterium erfüllt ist.*

Anmerkungen: Meistens ist eine raschere Konvergenz des Einzelschrittverfahrens gegenüber dem Gesamtschrittverfahren zu erwarten.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -4 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ diagonaldominant

Gesamtschrittverfahren: $\rho(T) = 0.57,\ N_Z(T) = 0.75, N_S(T) = 0.65$
Einzelschrittverfahren: $\rho(T) = 0.03\,, N_Z(T) = 0.40, N_S(T) = 0.48$

Konvergenzbeschleunigung

Idee: Folge $\{x^{(\nu)}\}_{\nu\geq 0}$ auf neue Folge $\{y^{(\nu)}\}_{\nu\geq 0}$ transformieren:
$x^{(0)}$, $x^{(1)} := Tx^{(0)} + g \to y^{(1)} := \omega x^{(1)} + (1-\omega)x^{(0)}$ $(0 < \omega < 2)$;
Einfügung des Parameters ω mit dem Ziel $\rho(T_\omega) < \rho(T)$.

Gesamtschrittverfahren mit Relaxation

$$x = \{\underbrace{(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)}_{=:T_\omega}\}x + \underbrace{\omega D^{-1}b}_{=:g_\omega} \qquad (\text{äquivalent zu } Ax = b)$$

Iteration $\quad x^{(\nu+1)} = T_\omega x^{(\nu)} + g_\omega$

SOR–Verfahren (Einzelschrittverfahren mit Relaxation)

$$x = \underbrace{(D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)}_{=:T_\omega} x + (D+\omega L)^{-1}\omega b$$

Iteration $\quad x^{(\nu+1)} = \omega D^{-1}(-Lx^{(\nu+1)} - Ux^{(\nu)} + b) + (1-\omega)x^{(\nu)}$

Zusammenfassung

Iterationsverfahren sind für diagonaldominante Matrizen konvergent und numerisch stabil (unempfindlich gegenüber Rundungsfehlern).
Anwendung auf große dünnbesetzte Matrizen (Bandstruktur).

Direkte Verfahren

Elementare Matrixumformungen führen auf Dreiecksgestalt (gestaffeltes System). Rekursive Auflösung liefert bei rundungsfehlerfreier Rechnung in *endlich vielen* Schritten die exakte Lösung (Rundungsfehler §5).

Anwendung: Unabhängig von speziellen Eigenschaften der Matrix;
vorhandene Strukturen werden zerstört.

LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ b \in \mathbb{R}^n,\ \det A \neq 0.$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -4 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 37 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{35}{4} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{86}{5} \\ \frac{105}{4} \end{pmatrix}$$

Rekursiv folgt die Lösung $x_3 = 3,\ x_2 = 2,\ x_1 = 1 \quad \rightarrow$ Probe!

Idee: Sequenz von elementaren Transformationen

$$(A, b) =: (A^{(1)}, b^{(1)}) \rightarrow (A^{(2)}, b^{(2)}) \rightarrow \cdots \rightarrow (A^{(n)}, b^{(n)}) =: (R, c).$$

Jedes auftretende System besitzt dieselbe Lösung wie das ursprüngliche;
R ist obere Dreiecksmatrix.

Permutationsmatrizen

In jeder Zeile und Spalte *genau eine* Eins, sonst Nullen; sie sind orthogonal. Multiplikation von links bewirkt eine Permutation der Zeilen, Multiplikation von rechts eine Permutation der Spalten.
Für $n = 3$ gibt es folgende Permutationsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}.$$

Elementarmatrizen $L^{(j)}$

$$L^{(j)} \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{j+1\,j} & \ddots & & \\ & 0 & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{nj} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix ${L^{(j)}}^{-1}$ unterscheidet sich von $L^{(j)}$ nur durch ein Minus–Zeichen vor den Elementen $l_{j+1\,j}, \ldots, l_{nj}$. Das Produkt von Elementarmatrizen ergibt eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Diagonalen und den entsprechenden Elementen $l_{21}, \ldots, l_{n1}\ ;\ l_{32}, \ldots, l_{n2}\ ;\ l_{43}, \ldots, l_{n3};\ \ldots\ ;\ l_{nn-1}$ unterhalb.

Die Gauß–Elimination

LGS $Ax = b$ evtl. mit Permutation (Pivotsuche) $(A^{(1)}, b^{(1)}) := P^{(1)}(A, b)$

1. Schritt: $(A^{(1)}, b^{(1)}) \longrightarrow (A^{(2)}, b^{(2)})$

$a_{11}^{(1)} \neq 0$ Pivotelement (Pivot=Dreh– und Angelpunkt).

Elimination der Unbekannten x_1 in der 2. bis n–ten Zeile durch Addition des $\left(-\frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)$–fachen der 1. Zeile zur j–ten Zeile:

$$\begin{aligned}
a_{1k}^{(2)} &:= a_{1k}^{(1)}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad b_1^{(2)} := b_1^{(1)}, \\
a_{ik}^{(2)} &:= a_{ik}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1k}^{(1)}, \quad i = 2, \ldots, n,\ k = 2, \ldots, n, \\
b_i^{(2)} &:= b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}, \quad i = 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Matrixschreibweise:

$(A^{(2)}, b^{(2)}) := L^{(1)}(A^{(1)}, b^{(1)})$, $L^{(1)}$ mit $l_{i1} := -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $i \geq 2$;

evtl. mit Permutation (Pivotsuche) der 2. bis n–ten Zeile:

$(A^{(2)}, b^{(2)}) := P^{(2)} L^{(1)}(A^{(1)}, b^{(1)})$ mit Pivot $a_{22}^{(2)} \neq 0$.

ν**–ter Schritt**: $(A^{(\nu)}, b^{(\nu)}) \longrightarrow (A^{(\nu+1)}, b^{(\nu+1)})$, Pivot $a_{\nu\nu}^{(\nu)} \neq 0$.

Elimination der Unbekannten x_ν in der $(\nu + 1)$–ten bis n–ten Zeile durch Addition des $\left(-\frac{a_{j\nu}^{(\nu)}}{a_{\nu\nu}^{(\nu)}}\right)$–fachen der ν–ten Zeile zur j–ten Zeile $(j = \nu + 1, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned}
a_{ik}^{(\nu+1)} &:= a_{ik}^{(\nu)}, \quad i \leq \nu,\ k \geq i, \\
b_i^{(\nu+1)} &:= b_i^{(\nu)}, \quad i \leq \nu, \\
a_{ik}^{(\nu+1)} &:= a_{ik}^{(\nu)} - \frac{a_{i\nu}^{(\nu)}}{a_{\nu\nu}^{(\nu)}} a_{\nu k}^{(\nu)}, \quad i \geq \nu + 1,\ k \geq \nu + 1, \\
b_i^{(\nu+1)} &:= b_i^{(\nu)} - \frac{a_{i\nu}^{(\nu)}}{a_{\nu\nu}^{(\nu)}} b_\nu^{(\nu)}, \quad j \geq \nu + 1.
\end{aligned}$$

Matrixschreibweise:

$(A^{(\nu+1)}, b^{(\nu+1)}) := L^{(\nu)}(A^{(\nu)}, b^{(\nu)})$ $L^{(\nu)}$ mit $l_{i\nu} := -\frac{a_{i\nu}^{(\nu)}}{a_{\nu\nu}^{(\nu)}}$, $i \geq \nu + 1$;

evtl. mit Permutation (Pivotsuche) der $(\nu + 1)$–ten bis n–ten Zeile:

$(A^{(\nu+1)}, b^{(\nu+1)}) := P^{(\nu+1)} L^{(\nu)}(A^{(\nu)}, b^{(\nu)})$ mit Pivot $a_{\nu+1\,\nu+1}^{(\nu+1)} \neq 0$.

Insgesamt $n-1$ Schritte $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ ergeben

$$(A^{(n)}, b^{(n)}) := L^{(n-1)}(A^{(n-1)}, b^{(n-1)}).$$

Zusammen (ineinander einsetzen)

$$\begin{aligned}(A^{(n)}, b^{(n)}) &= L^{(n-1)}P^{(n-1)}L^{(n-2)}(A^{(n-2)}, b^{(n-2)}) = \ldots \\ &= L^{(n-1)}P^{(n-1)}L^{(n-2)}P^{(n-2)} \cdots L^{(1)}P^{(1)}(A, b).\end{aligned}$$

Gestaffeltes System $A^{(n)}x = b^{(n)}$

Lösung rekursiv

$$x_j = \frac{1}{a_{jj}^{(n)}} \left\{ b_j^{(n)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}^{(n)} x_k \right\}, \; j = n, n-1, \ldots, 1.$$

Pivotsuche $a_{\nu+1\,\nu+1}^{(\nu+1)} \neq 0$

Pivotsuche bedeutet eine Permutation von Zeilen und Spalten, damit das gewünschte Element in die Position $(\nu+1, \nu+1)$ rückt.

Maximale Spalten–Pivotsuche $|a_{\nu+1\,\nu+1}^{(\nu+1)}| = \max\limits_{j=\nu+1,\ldots,n} |a_{j\,\nu+1}^{(\nu+1)}|.$

Diagonale Pivotwahl (falls möglich) $P^{(n-1)} = \cdots = P^{(1)} = I$:

$$R = A^{(n)} = L^{(n-1)} \cdots L^{(1)} A =: L^{-1}A$$
$$L = {L^{(1)}}^{-1} \cdots {L^{(n-1)}}^{-1};$$

R obere Dreiecksmatrix, L untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Diagonalen.

Satz 3.5 *Ist diagonale Pivotwahl für A möglich, so führt die Gauß–Elimination zur LR–Zerlegung*

$$A = LR = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Anmerkungen: LR–Zerlegung wichtig für lineare Gleichungssyteme mit fester Koeffizientenmatrix und wechselnder rechter Seite (z.B. Interpolation).

LGS $Ax = b$, LR–Zerlegung $A = LR$, Lösung zweier gestaffelter Systeme:

$$Ly = b, \quad Rx = y, \quad \det A = \det L \cdot \det R = r_{11} \cdots r_{nn}.$$

Positiv definite Matrizen: Sämtliche Diagonalelemente von A sind positiv
$\rightarrow$ diagonale Pivotwahl

Das Cholesky–Verfahren

LGS $Ax = b$ mit positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Symmetrische Durchführung der Gauß–Elimination

$(A,b) =: (A^{(1)}, b^{(1)}) \to (A^{(2)}, b^{(2)}) \to \cdots \to (A^{(n)}, b^{(n)}) =: (D,c) \ \to D$ diagonal

$A^{(1)} := A$ positiv definit, $a_{11}^{(1)} > 0$, $L^{(1)}$ (wie bei Gauß);

$$A^{(2)} := L^{(1)} A^{(1)} {L^{(1)}}^T = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B^{(2)} & \\ 0 & & & \end{array}\right);$$

$A^{(2)}$ ist positiv definit: $x^T A^{(2)} x = \underbrace{x^T L^{(1)}}_{=:y^T \neq 0} A^{(1)} \underbrace{{L^{(1)}}^T x}_{=y} = y^T A^{(1)} y > 0;$

$B^{(2)}$ ist positiv definit (d.h. Diagonalelemente positiv).
Wiederholung des Schrittes durch Anwendung auf $A^{(2)}$ usw. :

$$L^{(n-1)} \cdots L^{(1)} A {L^{(1)}}^T \cdots {L^{(n-1)}}^T = \operatorname{diag}\,(a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{nn}^{(n)}) =: D > 0,$$

$$A = {L^{(1)}}^{-1} \cdots {L^{(n-1)}}^{-1} D^{1/2} D^{1/2} ({L^{(n-1)}}^T)^{-1} \cdots ({L^{(1)}}^T)^{-1} =: LL^T,$$

$$D^{1/2} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{a_{11}^{(1)}}, \sqrt{a_{22}^{(2)}}, \ldots, \sqrt{a_{nn}^{(n)}}\right), \quad D^{1/2} D^{1/2} = D.$$

Cholesky–Zerlegung

$$A = LL^T,\ L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix},\ l_{jj} = \sqrt{a_{jj}^{(j)}} > 0,\ \det A = l_{11}^2 \cdots l_{nn}^2.$$

Satz 3.6 *Eine positiv definite Matrix A lässt sich zerlegen in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix mit ihrer transponierten Matrix $A = LL^T$.*

Cholesky–Algorithmus

Berechnung der Matrix L zeilenweise:

$$\begin{array}{rrcl} \text{bilde} & l_{11} & := & \sqrt{a_{11}}, \\ j\text{–te Zeile} & l_{jk} & := & \dfrac{1}{l_{kk}}\Big(a_{jk} - \sum\limits_{\nu=1}^{k-1} l_{j\nu} l_{k\nu}\Big), \quad k = 1,2,\ldots,j-1, \\ & l_{jj} & := & \sqrt{a_{jj} - \sum\limits_{\nu=1}^{j-1} |l_{j\nu}|^2}, \quad j = 2,3\ldots,n. \end{array}$$

Anmerkungen: Aufwand um die Hälfte reduziert im Vergleich zu LR, zusätzlich n Quadratwurzeln; Vorteil bei fast singulären Matrizen.

Beispielblatt: Lineare Gleichungssysteme

$$1) \qquad Ax = b \;\text{ mit }\; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(positiv definit):}$$

LR–Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 15/4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 15/4 & 1 & 0 \\ 0 & -4/15 & 56/15 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 15/4 & 1 & 0 \\ 0 & -4/15 & 56/15 & 1 \\ 0 & 0 & -15/56 & 209/56 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1/4 & 1 & & \\ 0 & 4/15 & 1 & \\ 0 & 0 & 15/56 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ & 15/4 & 1 & 0 \\ & & 56/15 & 1 \\ & & & 209/56 \end{pmatrix}$$

Cholesky–Zerlegung (Algorithmus)

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = 2 \qquad (l_{31} = 0,\; l_{41} = l_{42} = 0) \\ l_{21} &= a_{21}/l_{11} = 1/2,\; l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{15}/2 \\ l_{32} &= a_{32}/l_{22} = 2\sqrt{15}/15,\; l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{32}^2} = 2\sqrt{210}/15 \\ l_{43} &= a_{43}/l_{33} = \sqrt{210}/28,\; l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{43}^2} = \sqrt{2926}/28 \end{aligned}$$

$$A = LL^T,\; L = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 0.5 & 1.936 & & \\ 0 & 0.516 & 1.932 & \\ 0 & 0 & 0.517 & 1.931 \end{pmatrix}$$

$$2) \qquad Ax = b \;\text{ mit }\; A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}:$$

Gauß–Elimination mit Spaltenpivotsuche

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ -2/3 & 1/3 & -1 & 17/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1 & 10/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ -1/3 & 2/3 & -1 & 10/3 \\ -2/3 & -1/2 & -1/2 & 4 \end{array}\right)$$

Gestaffeltes System

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10/3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung } \; x_3 = -8, x_2 = -7, x_1 = 19.$$

Ausgleichsproblem

LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, Rang $A = n$

Residuum (Restvektor) $r(x) := b - Ax$

Gesucht Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|r(x^*)\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|r(x)\|$.

Normen $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ ("eckig") $\rightarrow$ Minimierungverfahren

Norm $\|\cdot\|_2$ ("rund"): Lösung überraschend einfach über LGS
$\rightarrow$ *Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate (nach Gauß)*

Ansatz $p(t) = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x_{\nu+1} t^\nu$, Werte einsetzen $p(t_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, m$:

Überbestimmtes LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^{n-1} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Zielfunktion

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \|r(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \{p(t_i) - p_i\}^2 = x^T A^T A x - 2x^T A^T b + b^T b$$

Bestimmung der Koeffizienten x_ν: $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \mathit{Minimum}$

$\rightarrow$ notwendige und hinreichende Bedingungen über partielle Ableitungen

Notwendige Bedingung $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$ ergibt quadratisches LGS

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right)^T = 2A^T A x - 2A^T b = 0$$

Normalgleichungen $A^T A x = A^T b$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$,
$A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit

Satz 3.7 *Die Matrix A besitze vollen Rang. Die eindeutig bestimmte Lösung x^* der Normalgleichungen löst das überbestimmte lineare Gleichungssystem $Ax = b$ im Sinne der Euklidischen Norm bestmöglich, d.h. $\|r(x^*)\|_2$ ist minimal.*

Anmerkungen: Normalgleichungen sind i.a. schlecht konditioniert, d.h. sehr empfindlich gegenüber Störungen $\rightarrow$ Vorkonditionierung (spezielle Verfahren)

Anwendungen

Computer–Tomographie

Pro Schnittbild eine Million Daten für eine Viertel Million Lösungskomponenten.

Fehlerausgleich bei Messreihen

Zu bestimmten Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ wird eine physikalische Größe $p_1, p_2, \ldots, p_m$ gemessen. Es sei bekannt, dass sich $p(t)$ in gewisser Näherung wie ein Polynom aus $\mathcal{P}_{n-1}$ verhält. Dieses $p(t)$ soll nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden.

Beispielblatt: Ausgleichsproblem

Zu bestimmten nicht äquidistanten Zeitpunkten t_i wird eine physikalische Größe $p(t)$ gemessen:

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i	0.04	0.32	0.51	0.73	1.03	1.42	1.60
p_i	2.63	1.18	1.16	1.54	2.65	5.41	7.67

Es ist bekannt, dass $p(t)$ in guter Näherung eine quadratische Funktion der Zeit ist; es sollen ihre Parameter nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden.

Ansatz: $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad \sum_{i=1}^{7} \{p_i - p(t_i)\}^2 = \mathit{Minimum}$

Überbestimmtes LGS: $p(t_i) = p_i, \; i = 1(1)7$ oder $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.04 & 0.0016 \\ 1 & 0.32 & 0.1024 \\ 1 & 0.51 & 0.2601 \\ 1 & 0.73 & 0.5329 \\ 1 & 1.03 & 1.0609 \\ 1 & 1.42 & 2.0164 \\ 1 & 1.60 & 2.5600 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_7 \end{bmatrix}$$

Normalgleichungen $A^T A x = A^T b$ mit

$$A^T A = \begin{bmatrix} 7.00000 & * & * \\ 5.65000 & 6.53430 & * \\ 6.53430 & 8.60652 & 12.1071 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} -22.2400 \\ -24.8823 \\ -34.6027 \end{bmatrix}$$

Cholesky–Zerlegung $A^T A = L L^T$ mit

$$L = \begin{bmatrix} 2.64575 & 0 & 0 \\ 2.13550 & 1.40497 & 0 \\ 2.46973 & 2.37187 & 0.617867 \end{bmatrix}$$

Auflösung $Ly = A^T b, \; L^T x = y$ ergibt

$$y = \begin{bmatrix} -8.40593 \\ -4.93349 \\ -3.46466 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2.74928 \\ -5.95501 \\ 5.60745 \end{bmatrix}$$

Fehler $\min_{x \in \mathbb{R}^3} ||b - Ax||_2 = 0.3786$

Ergebnis (gerundet auf 2 Stellen)

$$p(t) = 2.75 - 5.96 \cdot t + 5.61 \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{7} \{p_i - p(t_i)\}^2 \leq 0.38$$

4 Polynome und Splines

Komplizierte Funktion durch einfache Funktion approximieren!
Polynome: Anschaulich (Funktionsverlauf, Nullstellen, Ableitungen, Stammfunktionen, Auswertung, Umentwicklung)
Tschebyscheff–Polynome: Fourier–Entwicklung
Spline–Funktionen: Stückweise polynomiale Funktionen

Algebraische Polynome

Normalform $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$
Koeffizienten a_ν reell, Grad $p = n$
$\mathcal{P}_n$ Raum der Polynome vom Grad $\leq n$, $\dim \mathcal{P}_n = n+1$

Gesucht: Wert $p_n(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

Rekursive Auswertung ("von innen"):

$$\underbrace{\Bigg(\cdots \underbrace{\Big(\underbrace{(\underbrace{a_n}_{=:a_n^{(1)}} \cdot\alpha + a_{n-1})}_{=:a_{n-1}^{(1)}}\alpha + a_{n-2}\Big)\alpha + \cdots + a_1}_{=:a_1^{(1)}} \Bigg)\alpha + a_0}_{=:a_0^{(1)} = p_n(\alpha)} = p_n(\alpha)$$

Hornerschema

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & \\
x=\alpha & - & \alpha a_n^{(1)} & \alpha a_{n-1}^{(1)} & \cdots & \alpha a_2^{(1)} & \alpha a_1^{(1)} & \\
\hline
 & a_n^{(1)} & a_{n-1}^{(1)} & a_{n-2}^{(1)} & \cdots & a_1^{(1)} & \boxed{a_0^{(1)}} & = p_n(\alpha)
\end{array}$$

Beispiel: $p(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 8 & 0 & -8 & 0 & +1 & \\
x=\frac{1}{2} & - & 4 & 2 & -3 & -\frac{3}{2} & \\
\hline
 & 8 & 4 & -6 & -3 & \boxed{-\frac{1}{2}} & = p(\frac{1}{2})
\end{array}$$

Das Hornerschema ordnet den Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ die neuen Koeffizienten $a_n^{(1)}, a_{n-1}^{(1)}, \ldots, a_1^{(1)}, a_0^{(1)}$ zu.

Abspaltung eines Linearfaktors (Euklidischer Algorithmus)

$p_n(x) = p_{n-1}(x)(x-\alpha) + a_0^{(1)} \;\Leftrightarrow\; p_n(\alpha) = a_0^{(1)}$

$p_{n-1}(x) = a_n^{(1)} x^{n-1} + a_{n-1}^{(1)} x^{n-2} + \cdots + a_1^{(1)}$

Koeffizientenvergleich

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = (x-\alpha)\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(1)} x^{\nu-1} + a_0^{(1)} = a_n^{(1)} x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} (a_\nu^{(1)} - \alpha a_{\nu+1}^{(1)}) x^\nu .$$

α Nullstelle von p_n: $p_n(\alpha) = a_0^{(1)} = 0$, dann "abdividieren"

$p_{n-1}(x) = a_n^{(1)} x^{n-1} + a_{n-1}^{(1)} x^{n-2} + \cdots + a_1^{(1)}$, $p_n(x) = (x-\alpha)\, p_{n-1}(x)$.

Vollständiges Hornerschema (wiederholte Anwendung auf $p_n, p_{n-1}, \ldots$)

$$\begin{array}{rcll} p_n(x) &=& p_{n-1}(x)(x-\alpha) + a_0^{(1)}; & a_0^{(1)} = p_n(\alpha) \\ p_{n-1}(x) &=& p_{n-2}(x)(x-\alpha) + a_1^{(2)}; & a_1^{(2)} = p_{n-1}(\alpha) \\ \vdots && \vdots & \vdots \\ p_1(x) &=& p_0(x)(x-\alpha) + a_{n-1}^{(n)}; & a_{n-1}^{(n)} = p_1(\alpha) \\ p_0(x) &=& a_n^{(n+1)} & \end{array}$$

Zusammen ("ineinander einsetzen")

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0^{(1)} + [a_1^{(2)} + p_{n-2}(x)(x-\alpha)](x-\alpha) \\ &= a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(x-\alpha) + p_{n-2}(x)(x-\alpha)^2 \\ &\vdots \\ &= a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(x-\alpha) + \cdots + a_{n-1}^{(n)}(x-\alpha)^{n-1} + a_n^{(n+1)}(x-\alpha)^n \end{aligned}$$

Entwicklung um α verglichen mit Taylor

$p_n(x) = p_n(\alpha) + p_n'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{p_n''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$

liefert das **Ergebnis** $\quad a_\nu^{(\nu+1)} = \frac{1}{\nu!}\, p_n^{(\nu)}(\alpha),\ \nu = 0, 1, \ldots, n$.

Vollständiges Hornerschema

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ x=\alpha & - & \alpha a_n^{(1)} & \alpha a_{n-1}^{(1)} & \cdots & \alpha a_2^{(1)} & \alpha a_1^{(1)} \\ \hline & a_n^{(1)} & a_{n-1}^{(1)} & a_{n-2}^{(1)} & \cdots & a_1^{(1)} & \underbrace{a_0^{(1)}}_{=p_n(\alpha)} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \hline & a_n^{(n-1)} & a_{n-1}^{(n-1)} & \underbrace{a_{n-2}^{(n-1)}}_{=\frac{1}{(n-2)!}\, p_n^{(n-2)}(\alpha)} & & & \\ x=\alpha & - & \alpha a_n^{(n)} & & & & \\ \hline & a_n^{(n)} & \underbrace{a_{n-1}^{(n)}}_{=\frac{1}{(n-1)!}\, p_n^{(n-1)}(\alpha)} & & & & \end{array}$$

Letzte Zeile: $a_n^{(n)} = a_n^{(n+1)} = \frac{1}{n!}\, p_n^{(n)}(\alpha)$

Beispiel $p(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 5$

	1	2	–9	5
$x = 1$	–	1	3	–6
	1	3	–6	$\boxed{-1}$
$x = 1$	–	1	4	
	1	4	$\boxed{-2}$	
$x = 1$	–	1		
	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$		

$p(1) = -1,\ p'(1) = -2,\ p''(1) = 5 \cdot 2! = 10,\ p'''(1) = 1 \cdot 3! = 6,$

$p(x) = -1 - 2(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3.$

Reelles Polynom: Komplexe Nullstellen treten paarweise auf

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\,\bar{\alpha} = x^2 - sx - t$$

Abspaltung eines quadratischen Faktors $x^2 - sx - t$:

$$p_n(x) = (x^2 - sx - t)\,p_{n-2}(x) + \underbrace{a_1^{(1)}x + a_0^{(1)}}_{=Rest}, \quad p_{n-2}(x) = \sum_{\nu=2}^{n} a_\nu^{(1)} x^{\nu-2}$$

Dreigliedrige Rekursion (Koeffizientenvergleich):

$$\begin{aligned}
a_n^{(1)} &:= a_n, \\
a_{n-1}^{(1)} &:= a_{n-1} + s a_n^{(1)}, \\
a_{n-\nu}^{(1)} &:= a_{n-\nu} + s a_{n-\nu+1}^{(1)} + t a_{n-\nu+2}^{(1)},\ \nu = 2, 3, \dots, n-2, \\
a_1^{(1)} &:= a_1 + s a_2^{(1)} + t a_3^{(1)}, \\
a_0^{(1)} &:= a_0 + t a_2^{(1)}.
\end{aligned}$$

$a_1^{(1)}$ und $a_0^{(1)}$ sind die gesuchten Koeffizienten.

Doppelzeiliges Hornerschema

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
s	–	$sa_n^{(1)}$	$sa_{n-1}^{(1)}$	$\cdots$	$sa_3^{(1)}$	$sa_2^{(1)}$	–
t	–	–	$ta_n^{(1)}$	$\cdots$	$ta_4^{(1)}$	$ta_3^{(1)}$	$ta_2^{(1)}$
	$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$\cdots$	$a_2^{(1)}$	$\boxed{a_1^{(1)}}$	$\boxed{a_0^{(1)}}$

Bestimmung von Polynomnullstellen

Reelles Polynom $p \in \mathcal{P}_n$

Reelle Nullstellen: Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$,
lokale quadratische Konvergenz (einfache Nullstellen),
Auswertung von $p(x_n), p'(x_n)$ mit Hornerschema.

Komplexe Nullstellen: quadratischen Faktors $x^2 - sx - t$ abspalten:
$p_n(x) = (x^2 - sx - t)p_{n-2}(x) + Qx + R,\ Q = a_1^{(1)}, R = a_0^{(1)}$;
nichtlineares Gleichungssystem $Q(s,t) = 0, \quad R(s,t) = 0$:
Newton–Verfahren $\rightarrow$ Bairstow–Verfahren

Lokalisierung der Polynomnullstellen

(Startwert für Newton, Bairstow; Stabilität)
Lage: Intervall (genaue Anzahl), Kreis (alle Nullstellen),
linke Halbebene $\rightarrow$ Stabilitätskriterien

Satz 4.1 (Gerschgorin) *Die Nullstellen* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *des Polynoms* $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *liegen in einem Kreis* $\mathcal{K}$ *um Null mit Radius* r, *wobei*

$$\begin{aligned} r &\leq \max\left\{1, \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\right\} \quad \textit{und} \\ r &\leq \max\{|a_0|, 1+|a_1|, \ldots, 1+|a_{n-1}|\}\,. \end{aligned}$$

Beweis: Kreissatz von Gerschgorin für Matrizen:
Alle Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ *liegen in der Vereinigung der Kreise*

$$K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq r_j\},\ r_j := \sum_{k \neq j} |a_{jk}|,\ j = 1, \ldots, n. \quad \square$$

Beispiele

1. $p(x) = x^2 - 101x + 100,\ \xi_1 = 1,\ \xi_2 = 100.$
   Gerschgorin: $|\xi_k| \leq \max\{1, 201\} = 201\,,\ |\xi_k| \leq \max\{100, 102\} = 102.$

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; alle Eigenwerte liegen in $[2, 6]$.

Sturmsche Kette

Gegeben: $p \in \mathcal{P}_n$ $(a_n \neq 0)$ mit einfachen Nullstellen in $[\alpha, \beta]$ $(p(\alpha)p(\beta) \neq 0)$
Gesucht: Anzahl der Nullstellen von p in $[\alpha, \beta]$
Idee: Bilde Folge von Polynomen (Sturmsche Kette)

$$p_0 := p,\ p_1 := p' \text{ und } p_2, \ldots, p_m$$

mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} p_0 &= q_1\, p_1 - p_2\,, && \text{Grad } p_2 < \text{Grad } p_1, \\ p_{j-1} &= q_j\, p_j - p_{j+1}\,, && \text{Grad } p_{j+1} < \text{Grad } p_j \ \ (j = 1, 2, \ldots, m-1), \\ p_{m-1} &= q_m\, p_m && \Rightarrow p_m = \text{ggT}(p_0, p_1). \end{aligned}$$

Beachte: Vorzeichen “$-$Rest”.
Index m ist richtig, da einfache Nullstellen von p_0 nur in $[\alpha, \beta]$.

Anzahl der Vorzeichenwechsel (VZW) in

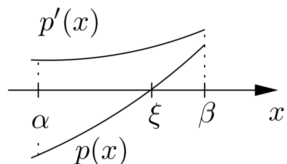
$$\{p_0(\alpha), p_1(\alpha), \ldots, p_m(\alpha)\} \text{ und } \{p_0(\beta), p_1(\beta), \ldots, p_m(\beta)\}$$

geben Auskunft über die Nullstellen.

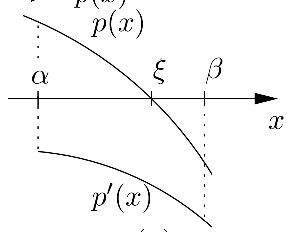
Beispiele

Anzahl der VZW beim Nulldurchgang von $p(x)$:

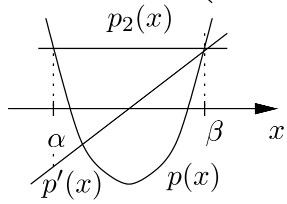
$p(\alpha) < 0, p'(\alpha) > 0 :\ - + \Rightarrow 1$ VZW,
$p(\beta) > 0, p'(\beta) > 0 :\ + + \Rightarrow 0$ VZW,
$\Rightarrow 1$ Nullstelle $\Leftrightarrow$ Verlust 1 VZW.



$p(\alpha) > 0, p'(\alpha) < 0 :\ + - \Rightarrow 1$ VZW,
$p(\beta) < 0, p'(\beta) < 0 :\ - - \Rightarrow 0$ VZW,
$\Rightarrow 1$ Nullstelle $\Leftrightarrow$ Verlust 1 VZW.



$p(\alpha) > 0, p'(\alpha) < 0, p_2(\alpha) > 0 :\ + - + \Rightarrow 2$ VZW,
$p(\beta) > 0, p'(\beta) > 0, p_2(\beta) > 0 :\ + + + \Rightarrow 0$ VZW,
$\Rightarrow 2$ Nullstellen $\Leftrightarrow$ Verlust 2 VZW.



Nullstelle von $p'(x)$ stört nicht d.h. kein VZW–Verlust:
VZ links davon $- - +$, VZ rechts davon $- + +$;
gilt allgemein für Nullstellen von p_j wegen $p_{j-1} = q_j\ p_j - p_{j+1}$ (“$-$Rest”)

Wechselzahl: $W(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_m) :=$ Anzahl der VZW in $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_m$ (wobei auftretende Nullen vor Zählung gestrichen werden).

Satz 4.2 (Satz von Sturm) *Sei $p \in \mathcal{P}_n$ mit nur einfachen Nullstellen in $[\alpha, \beta]$, $(p(\alpha)p(\beta) \neq 0)$ und besitze die Sturmsche Kette $p_0, p_1, \ldots, p_m$. Dann gilt für die Anzahl $Z_\alpha^\beta(p_0)$ der Nullstellen von p_0 in (α, β)*

$$Z_\alpha^\beta(p_0) = W(p_0(\alpha), p_1(\alpha), \ldots, p_m(\alpha)) - W(p_0(\beta), p_1(\beta), \ldots, p_m(\beta)).$$

Beispiel: $p(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad (= T_4(x))$;
$p_0(x) = p(x)$,
$p_1(x) = p'(x) = 32x^3 - 16x$,
$p_2(x) = 4x^2 - 1$,
$p_3(x) = 8x$,
$p_4(x) = 1$;
z.B. $p_2(x)$ ergibt sich aus (VZ beachten)
$8x^4 - 8x^2 + 1 = (32x^3 - 16x)\,\frac{x}{4} - (4x^2 - 1)$.

Vorzeichenwechsel in der Kette:

$x \to$	$-\infty$	:	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$W = 4$
$x =$	-1	:	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$W = 4$
$x =$	$-\frac{1}{2}$	:	$-$	$+$	0	$-$	$+$	$W = 3$
$x =$	0	:	$+$	0	$-$	0	$+$	$W = 2$
$x =$	$\frac{1}{2}$	:	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$W = 1$
$x =$	1	:	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$W = 0$
$x \to$	∞	:	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$W = 0$

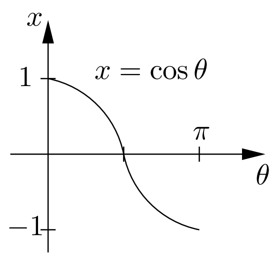
Jeweils 1 Nullstelle in $(-1, -0.5)$, $(-0.5, 0)$, $(0, 0.5)$ und $(0.5, 1)$.

Tschebyscheff–Polynome

P.L. Tschebyscheff 1821–1894 (St. Petersburg)

Tschebyscheff–Polynome $T_n(x)$ wichtig in der Numerik:
Günstige Basis für $\mathcal{P}_n$, Extremaleigenschaften, Orthogonalpolynome.

Definition: $T_n(x) := \cos n\theta,\ x = \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$
$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ n = 0, 1, 2, \ldots$
Transformation $[-1, 1] \to [0, \pi]$

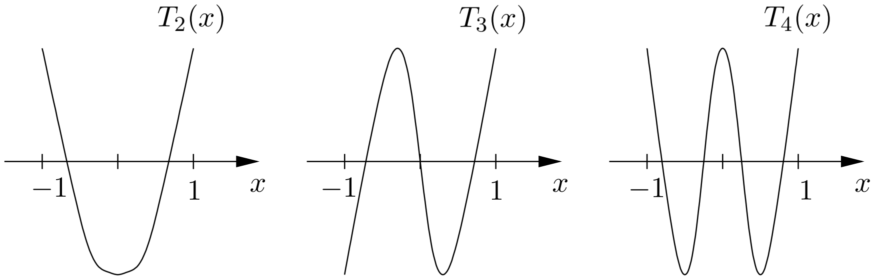


Algebraische Polynome: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = \cos\theta = x$,
$T_2(x) = \cos 2\theta = 2\cos\theta\cos\theta - 1 = 2xT_1(x) - T_0(x)$

Satz 4.3 *Es gilt die dreigliedrige Rekursionsformel*
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n = 1, 2, \ldots \textit{ mit } T_0(x) = 1, T_1(x) = x.$$

Beweis: Additionstheoreme [Ü] □

Beispiele:
$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1\,,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\,,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1\,,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\,,\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.
\end{aligned}$$



Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome

- T_n besitzt genauen Grad n mit Höchstkoeffizient 2^{n-1}.
- T_{2n} gerade, T_{2n-1} ungerade Funktion.
- $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$, $|T_n(x)| \le 1$ für alle $x \in [-1, 1]$.
- *Nullstellen:* $x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)$, $j = 1, \ldots, n$,
  d.h. nur einfache reelle Nullstellen, die alle in $(-1, 1)$ liegen.
- *Extremalstellen:* $\xi_j = \cos\left(\frac{j}{n}\,\pi\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n$ mit $T_n(\xi_j) = (-1)^j$.
- *Orthogonalpolynome*
  Skalarprodukt $\langle f, g\rangle$ mit Gewichtsfunktion $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $[-1, 1]$:
  $$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & , \quad m \ne n, \\ \frac{\pi}{2} & , \quad m = n \ne 0, \\ \pi & , \quad m = n = 0. \end{cases}$$

Tschebyscheff–Entwicklung $p_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu T_\nu$

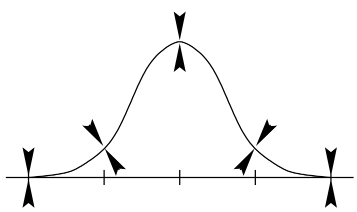
stabile Darstellung: Störung in den α_ν verursacht kleine Auswirkung!
Koeffizienten der Tschebyscheff–Entwicklung nehmen ab!

Beispiel $h_j(x) := x^j$ in $[-1, 1]$:

$$p = h_0 + h_1 + \cdots + h_5 = \frac{15}{8}T_0 + \frac{19}{8}T_1 + T_2 + \frac{9}{16}T_3 + \frac{1}{8}T_4 + \frac{1}{16}T_5$$

Spline–Funktionen (stückweise polynomiale Funktionen)

Vorgeschichte aus Schiffsbau:
Straklatte, Strak=spline, spline=Keil/Feder;
Duden: Seemannssprache;
Strak: das “Gerichtetsein”, Verlauf von Linien;
Straken: vorschriftsmäßig verlaufen
z.B: Schiffsrumpf: “Krümmung minimal”
→ **stückweise kubisches Polynom**
und in den Anschlussstellen glatt,
d.h. 2 mal stetig differenzierbar.



“Krümmung minimal” bedeutet

$$\int_a^b |s''(x)|^2\,dx \; = \text{minimal unter allen zulässigen Funktionen.}$$

Gitter $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad (n+1 \text{ Knoten})$

Definition: $s_\Delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Spline vom Grad* ℓ bezüglich des Gitters Δ, falls gilt:

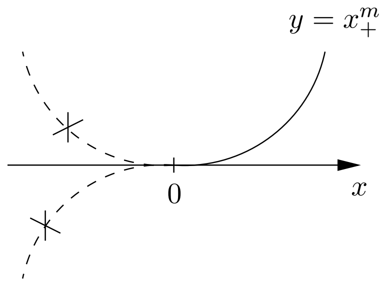
1. $s_\Delta|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathcal{P}_\ell, \; j = 1, \ldots, n,$
2. $s_\Delta \in C^{\ell-1}[a,b].$

Bezeichnung $S_\ell(\Delta)$: Raum der Splines vom Grad ℓ bezüglich Gitter Δ
Dimension $S_\ell(\Delta) = n + \ell$

Spline vom Grad 0 :	Treppenfunktion	(stückweise stetig)
Spline vom Grad 1 :	Polygonzug	(stetig)
Spline vom Grad 2 :	Parabelzug	(stetig differenzierbar)
Spline vom Grad 3 :	Kubischer Spline	(s'' Polygonzug) $\to$ Krümmung

Abgeschnittene Potenzfunktion
(Spline vom Grad m mit 1 Knoten):

$$x_+^m := \begin{cases} x^m & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$



Kubische Splines: Raum $S_3(\Delta)$ der Dimension $n+3$

Darstellung mit abgeschnittener Potenzfunktion

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2} b_j (x - x_0)_+^j + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x - x_k)_+^3$$

Darstellung intervallweise durch Polynome

$$s(x) := \begin{cases} p_0(x) & \text{in} \quad [x_0, x_1] \\ p_1(x) & \text{in} \quad [x_1, x_2] \\ \vdots & \qquad \vdots \\ p_{n-1}(x) & \text{in} \quad [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \qquad p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathcal{P}_3$$

Darstellung mit B–Splines $s = \sum\limits_{j=-1}^{n+1} \alpha_j \Phi_j,$

$\Phi_j(x_j) = 1, \; \Phi_j(x) = 0$ für x außerhalb $[x_{j-2}, x_{j+2}]$

$n = 2$: