



Numerische Methoden für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss

Klausur vom 17.2.2010

Aufgabe 1: (1 Punkt)

Berechnen Sie die Maschinenmultiplikation $0.111 \cdot 2^{-1} \odot 0.111 \cdot 2^1$ (Dualdarstellung). Die Genauigkeit beträgt 3 Dualstellen.

Aufgabe 2: (1+1 Punkte)

- Definieren Sie die Operatornorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ausgehend von einer Vektornorm $\|\cdot\|$ im \mathbb{R}^n .
- Was ist die geometrische Bedeutung dieser Operatornorm?

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Vergleichen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche sowie die QR-Zerlegung für die Lösung linearer Gleichungssysteme: Was sind die wichtigsten Vor-/Nachteile der beiden Verfahren?

Aufgabe 4: (1+1+1 Punkte)

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

zu dessen Lösung wir das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren) verwenden wollen.

- Bestimmen Sie die zugehörige Iterationsmatrix S und den Vektor g der Iterationsvorschrift $x^{(n+1)} = Sx^{(n)} + g$ in Abhängigkeit von α .
- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\|S\|_\infty < 1$?
- Die exakte Bedingung für Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens ist $\rho(S) < 1$ (wobei $\rho(S)$ den Spektralradius von S bezeichnet). Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert somit das obige Jacobi-Verfahren?

Aufgabe 5: (1+1 Punkte)

Es sei

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - x_1 \\ x_2 - \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen Lösungen der Gleichung $F(x) = 0$ suchen.

- a) Beweisen Sie oder begründen Sie anhand einer Skizze, dass es genau drei Lösungen im \mathbb{R}^2 gibt.
- b) Führen Sie einen Schritt des ungedämpften Newton-Verfahrens im Punkt $x^{(k)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch.

Aufgabe 6: (1 Punkt)

Was ist der entscheidende Vorteil der Spline-Interpolation gegenüber der Polynominterpolation?

Aufgabe 7: (2 Punkte)

Für welche Wertekombinationen von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen? (Mit Begründung!)

Aufgabe 8: (2+1+1 Punkte)

Wir wollen $\int_a^b f(x) dx$ mit zusammengesetzten Quadraturformeln auf einer uniformen Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ berechnen.

- a) Geben Sie sowohl die Trapez- als auch die Simpson-Regel explizit an.
- b) In welchen Situationen wird man lieber die Simpson-Regel verwenden als die Trapezregel? Wann eher nicht?
- c) Wie groß ist der Quadraturfehler für Trapez- und Simpson-Regel im Falle der Funktion $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ und der Unterteilung

$$\{x_0, \dots, x_4\} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}?$$

Aufgabe 9: (1+1+1 Punkte)

Es seien $\lambda, u_0 \in \mathbb{R}$.

- a) Wie lautet die exakte Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung: Suche $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{d}{dt}u(t) = \lambda \overline{u(t)}, \quad u(0) = u_0?$$

- b) Führen Sie einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h > 0$ durch. Welchen Wert u_1 erhält man als Approximation von $u(h)$?
- c) Beweisen Sie, dass für $u_0 > 0$, $\lambda > 0$ und $h > 0$ immer $u_1 < u(h)$ gilt.

Zur Beachtung:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.
- Handys ausschalten.
- Papier wird gestellt.
- Bitte halten sie Ihren Studierendenausweis bereit.
- Zum Bestehen der Klausur sind 8 Punkte hinreichend.

Numerische Methoden für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss

Klausur vom 17.2.2010

Aufgabe 1: (1 Punkt)

Berechnen Sie die Maschinenmultiplikation $0.111 \cdot 2^{-1} \odot 0.111 \cdot 2^1$ (Dualdarstellung). Die Genauigkeit beträgt 3 Dualstellen.

Lösung:

$$\begin{aligned} 0.111 \cdot 2^{-1} \odot 0.111 \cdot 2^1 &= \text{rd}(111 \cdot 2^{-4} \cdot 111 \cdot 2^{-2}) \\ &= \text{rd}(110001 \cdot 2^{-6}) \\ &= \text{rd}(0.110001 \cdot 2^0) \\ &= 0.110 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (1+1 Punkte)

- Definieren Sie die Operatornorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ausgehend von einer Vektornorm $\|\cdot\|$ im \mathbb{R}^n .
- Was ist die geometrische Bedeutung dieser Operatornorm?

Lösung:

a)

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

- Es ist der maximale Vergrößerungsfaktor eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ unter Anwendung der zu A gehörenden linearen Abbildung.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Vergleichen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche sowie die QR-Zerlegung für die Lösung linearer Gleichungssysteme: Was sind die wichtigsten Vor-/Nachteile der beiden Verfahren?

Lösung: Die LR-Zerlegung mit Pivotsuche hat einen Aufwand von (asymptotisch) $\frac{2}{3}n^3$ arithmetischen Operationen, sie ist aber nicht für alle Matrizen numerisch stabil (d.h.

Rundungsfehler können sich vergrößern). Die QR-Zerlegung besitzt dagegen perfekte Stabilität in der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$, hat aber dafür in etwa den doppelten Aufwand.

Aufgabe 4: (1+1+1 Punkte)

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

zu dessen Lösung wir das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren) verwenden wollen.

- Bestimmen Sie die zugehörige Iterationsmatrix S und den Vektor g der Iterationsvorschrift $x^{(n+1)} = Sx^{(n)} + g$ in Abhängigkeit von α .
- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\|S\|_\infty < 1$?
- Die exakte Bedingung für Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens ist $\rho(S) < 1$ (wobei $\rho(S)$ den Spektralradius von S bezeichnet). Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert somit das obige Jacobi-Verfahren?

Lösung:

- a) Die Iteration hat die Form $x^{(n+1)} = x^{(n)} + D^{-1}(b - Ax^{(n)})$, so dass wir ablesen

$$S = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad g = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Es gilt

$$\|S\|_\infty = \max \left\{ \frac{2}{|\alpha|}, \frac{1}{3} \right\},$$

was für $|\alpha| > 2$ kleiner als 1 ist.

- c) Die Eigenwerte von S berechnen sich durch Lösung von

$$\chi_S(\lambda) = \det(S - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{2}{3\alpha} = 0,$$

woraus sich $\lambda_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3\alpha}}$ ergibt. Hier gilt offenbar $|\lambda| = \sqrt{\frac{2}{3|\alpha|}}$, und somit ist $\rho(S) < 1$ genau dann erfüllt, wenn $|\alpha| > \frac{2}{3}$.

Aufgabe 5: (1+1 Punkte)

Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - x_1 \\ x_2 - \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen Lösungen der Gleichung $F(x) = 0$ suchen.

- Beweisen Sie oder begründen Sie anhand einer Skizze, dass es genau drei Lösungen im \mathbb{R}^2 gibt.

- b) Führen Sie einen Schritt des ungedämpften Newton-Verfahrens im Punkt $x^{(k)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch.

Lösung:

- a) Geometrisch bedeutet die Gleichung $F(x) = 0$ den Schnittpunkt der Geraden $x_2 = \frac{x_1}{2}$ mit der Funktion $x_2 = \sin(x_1)$. Diese schneiden sich im Punkt $x_1 = 0$, sowie bei zwei anderen Punkten $x_1 = \xi \in (0, \pi)$ und $x_1 = -\xi \in (-\pi, 0)$. Weitere Schnittpunkte gibt es nicht, weil die Gerade für $|x_1| > \pi$ schon größer als 1 ist.

- b) Die Ableitung berechnet sich zu

$$DF : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\cos(x_1) & 1 \end{pmatrix},$$

insbesondere gilt

$$DF(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Newton-Iterationsvorschrift ist

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - DF(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}),$$

für uns also

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schritt führt also direkt in eine der Lösungen (was sozusagen „Zufall“ ist).

Aufgabe 6: (1 Punkt)

Was ist der entscheidende Vorteil der Spline-Interpolation gegenüber der Polynominterpolation?

Lösung: Die Spline-Interpolation konvergiert für viel mehr Funktionen (sogar einfache Stetigkeit reicht aus!), wohingegen die Polynom-Interpolation nur für sehr spezielle Funktionen konvergiert.

Aufgabe 7: (2 Punkte)

Für welche Wertekombinationen von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen? (Mit Begründung!)

Lösung: Die Bedingung der natürlichen Randbedingungen ist $s''(0) = s''(1) = 0$ führt mit

$$s''(x) = 6ax + 2b$$

zu $a = b = 0$. c, d kann man dagegen frei wählen, also sind genau die Geraden die kubischen Splines mit natürlichen Randbedingungen.

Aufgabe 8: (2+1+1 Punkte)

Wir wollen $\int_a^b f(x) dx$ mit zusammengesetzten Quadraturformeln auf einer uniformen Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ berechnen.

- Geben Sie sowohl die Trapez- als auch die Simpson-Regel explizit an.
- In welchen Situationen wird man lieber die Simpson-Regel verwenden als die Trapezregel? Wann eher nicht?
- Wie groß ist der Quadraturfehler für Trapez- und Simpson-Regel im Falle der Funktion $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ und der Unterteilung

$$\{x_0, \dots, x_4\} = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}?$$

Lösung:

- Die zusammengesetzte Trapezregel hat mit $x_i = a + ih$ die Formel

$$T_h(f) = h \left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right),$$

die zusammengesetzte Simpson-Regel die Formel

$$S_h(f) = h \left(\frac{f(a)}{6} + \frac{f(b)}{6} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right).$$

- Wenn die Funktion f glatt ist (mehr als C^2) so ist die Simpson-Regel wenigstens für kleine h genauer, bei $f \in C^4$ sogar erheblich genauer. Wenn andererseits f nur C^2 (oder sogar noch weniger glatt) ist, so lohnt sich der etwas höhere Aufwand der —zudem noch komplizierteren— Simpson-Regel nicht.
- Obwohl die Funktion nicht einmal stetig differenzierbar ist, berechnen sowohl Trapez- als auch Simpson-Regel das Integral exakt. Das liegt daran, dass sowohl Integral als auch Quadraturregel in zwei Teile aufgespalten werden können („Additivität“), auf denen die Funktion dann linear ist. Lineare Funktionen werden aber von beiden Formeln exakt integriert.

Aufgabe 9: (1+1+1 Punkte)

Es seien $\lambda, u_0 \in \mathbb{R}$.

- Wie lautet die exakte Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung: Suche $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{d}{dt}u(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = u_0?$$

- b) Führen Sie einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h > 0$ durch. Welchen Wert u_1 erhält man als Approximation von $u(h)$?
- c) Beweisen Sie, dass für $u_0 > 0$, $\lambda > 0$ und $h > 0$ immer $u_1 < u(h)$ gilt.

Lösung:

a) Die exakte Lösung ist $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$.

b) Der explizite Eulerschritt ergibt $u_1 = u_0 + h\lambda u_0 = (1 + h\lambda)u_0$.

c) Wegen

$$1 + h\lambda < e^{\lambda h} = 1 + h\lambda + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \dots$$

folgt

$$u(h) = u_0 e^{\lambda h} < u_0(1 + \lambda h).$$