

**Aufgabe 1:** Gegeben sei die Funktion  $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $g(x)$  im Intervall  $[0, 1]$  genau einen Fixpunkt  $x^*$  besitzt und dass die Fixpunktiteration  $x_{n+1} = g(x_n)$  für jeden Startwert  $x_0 \in [0, 1]$  gegen  $x^*$  konvergiert.
- (b) Ausgehend vom Startwert  $x_0 = 0$  liefert das Iterationsverfahren  $x_{n+1} = g(x_n)$  die Näherungen  $x_2 = 0.4427$  und  $x_3 = 0.4546$ . Schätzen Sie den Abstand von  $x_3$  zum Fixpunkt  $x^*$  sowohl mit der a-priori als auch mit der a-posteriori Formel ab.
- (c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung von  $x = g(x)$  und berechnen Sie ausgehend vom Startwert  $x_0 = 0$  einen Newtonschritt.

**Aufgabe 2:** Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  für einen beliebigen Startvektor  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  konvergiert.
- (b) Berechnen Sie ausgehend vom Startvektor  $x^{(0)} = (0, 1, -2)^\top$  einen Schritt des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ .
- (c) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq 27 \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

**Aufgabe 3:**

- (a) Gegeben seien die Matrix  $A$  und der Vektor  $b$  aus Aufgabe 2. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix  $A$  und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ .
- (b) Wie wirkt sich bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  eine Störung  $\Delta b$  der rechten Seite  $b$  auf den relativen Fehler der Lösung  $x$  aus?

**Aufgabe 4:** Gegeben sei das Polynom  $p(x) = 2x^3 + 2x - 4$ .

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von  $p(x)$  liegen.
- (b) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von  $p(x)$  in den Intervallen  $[-2, -1/2]$ ,  $[-1/2, 1/2]$  und  $[1/2, 2]$  zu bestimmen.

### Aufgabe 5:

- (a) Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x - \cos^2(\pi x)$ .

Berechnen Sie das Interpolationspolynom  $p_3$  zu  $f$  bezüglich  $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$  und  $x_3 = 1$  in Newton-Gestalt. Zeigen Sie, dass gilt

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{12} \pi^4.$$

Hinweis:  $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ .

- (b) Geben Sie die Definition eines kubischen Splines an. Welche Arten von Randvorgaben können sinnvoll vorgegeben werden? Welche der Funktionen  $s_i : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind kubische Splines bezüglich des Gitters  $\Delta := \{0, 1, 2\}$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \begin{cases} -6x + 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 - 3x + x^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ s_2(x) &= x^4 - x \\ s_3(x) &= |x - 1| \end{aligned}$$

### Aufgabe 6:

- (a) Von einer Funktion  $f \in C([0, 4])$  seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(0) = 5, f(1) = 1, f(2) = -\frac{3}{2}, f(3) = -\frac{11}{2}, f(4) = -5$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktionswerte das Romberg-Schema für das Integral

$$I = \int_0^4 f(x) dx.$$

- (b) Bestimmen Sie eine Quadraturformel mit den Knoten  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$  und  $x_4 = 2$  und dem Exaktheitsgrad 3 zur näherungsweise Berechnung von  $I = \int_0^2 f(x) dx$ .

### Aufgabe 7:

- (a) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$ , welche auf  $[0, 2\pi)$  gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

- (b) Gegeben seien die Bézier-Punkte  $(0, 0), (\frac{1}{3}, 1), (\frac{2}{3}, 2), (1, 1)$ . Bestimmen Sie die Bézier-Darstellung des Polynoms  $p(x)$  zu den Bézier-Punkten und geben Sie die Definition der zugehörigen Bernstein-Grundpolynome an. Berechnen Sie  $p(\frac{1}{3})$  mit dem Algorithmus von de Casteljau und skizzieren Sie den Graph des Polynoms sowie das Bézier-Polygon für  $x \in [0, 1]$  in einem Schaubild.

## Lösung zur Klausur vom 21. Juli 2005

**Aufgabe 1:** Gegeben sei die Funktion  $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $g(x)$  im Intervall  $[0, 1]$  genau einen Fixpunkt  $x^*$  besitzt und dass die Fixpunktiteration  $x_{n+1} = g(x_n)$  für jeden Startwert  $x_0 \in [0, 1]$  gegen  $x^*$  konvergiert.
- (b) Ausgehend vom Startwert  $x_0 = 0$  liefert das Iterationsverfahren  $x_{n+1} = g(x_n)$  die Näherungen  $x_2 = 0.4427$  und  $x_3 = 0.4546$ . Schätzen Sie den Abstand von  $x_3$  zum Fixpunkt  $x^*$  sowohl mit der a-priori als auch mit der a-posteriori Formel ab.
- (c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung von  $x = g(x)$  und berechnen Sie ausgehend vom Startwert  $x_0 = 0$  einen Newtonschritt.

**Lösung:**

(a) Zu zeigen: Voraussetzung des BFPS 1/2

(1)  $I = [0, 1]$  abgeschlossen

(2)  $g$  Abb. in sich:  $g(I) \subseteq I$ : Bestimme Maxima/Minima von  $g$ :

$$g'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \left[ -1 + \frac{1}{4}x \right] \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = 4 \notin I$$

$$g(0) = \frac{1}{2}, \quad g(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{12 - 6 + 1}{24} = \frac{7}{24}$$

$$0 \leq \frac{7}{24} = g(1) \leq g(0) = \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow g(I) \subseteq I \quad \boxed{1/2}$$

(3)  $g$  Kontraktion, d.h.  $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ ,  $L \in (0, 1)$ : Da  $g$  diffbar gilt  $L = \max_{x \in [0, 1]} |g'(x)|$

$$\max_{x \in [0, 1]} |g'(x)| = \max_{x \in [0, 1]} \left| -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 \right| = \frac{1}{8} \max_{x \in [0, 1]} |x^2 - 4x|$$

$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$  ist eine nach oben offene Parabel mit Scheitelpunkt  $(2, -4)$ ,

$$\Rightarrow \max_{x \in [0, 1]} |g'(x)| = |g'(1)| = \frac{1}{8}|1^2 - 4 \cdot 1| = \frac{3}{8} = L \quad \boxed{1}$$

$\Rightarrow$  Bed. des BFPS sind erfüllt,  $x_{n+1} = g(x_n)$  konv. für jeden Startwert  $x_0 \in I$  gegen Fixpunkt  $x^* \in [0, 1]$ .

(b) a-priori Fehlerabschätzung:  $|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$ : 1/2.

$$\text{Mit } x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2} \text{ folgt } |x_3 - x^*| \leq \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^3}{1 - \frac{3}{8}} \left| \frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{27}{640} \quad \boxed{1/2}$$

a-posteriori Fehlerabschätzung:  $|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$ : 1/2

$$\Rightarrow |x_3 - x^*| \leq \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}} |0.4546 - 0.4427| = \frac{3}{5} \cdot 0.0119 \quad \boxed{1/2}$$

(c) Umformung des Fixpunktproblems  $g(x) = x$  in ein Nullstellenproblem  $f(x) = 0$ :

$$x = g(x) \Rightarrow f(x) := g(x) - x = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 \stackrel{!}{=} 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{2} - x_n - \frac{1}{4}x_n^2 + \frac{1}{24}x_n^3}{-1 - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{8}x_n^2} \quad \boxed{1/2}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2} \quad \boxed{1/2}$$

**Aufgabe 2:** Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  für einen beliebigen Startvektor  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  konvergiert.
- (b) Berechnen Sie ausgehend vom Startvektor  $x^{(0)} = (0, 1, -2)^\top$  einen Schritt des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ .
- (c) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq 27 \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

**Lösung:**

- (a) GSV konvergiert nach Satz 3.3, falls das Zeilen- oder Spaltensummenkriterium erfüllt ist. Oder auch, falls die Matrixnorm der Iterationsmatrix  $< 1$  ist. 1  
 Zeilensummenkriterium:

$$\begin{aligned} |6| &= 6 > 3 = |-2| + |1| \\ |4| &= 4 > 3 = |-3| + |0| \\ |2| &= 2 > 1 = |0| + |-1| \end{aligned}$$

Matrixnorm

$$N_Z(T_{GSV}) = \max \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{4} < 1$$

1

- (b)

$$GSV : x^{(n+1)} = T_{GSV}x^{(n)} + g_{GSV} \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1/2$$

$$T_{GSV} = -D^{-1}(L + U) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1/2$$

$$g_{GSV} = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1/2$$

$$x^{(1)} = T_{GSV}x^{(0)} + g_{GSV} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1/2$$

- (c) a-priori-Fehlerabschätzung:  $\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$  1/2  
 mit  $L = N_Z(T_{GSV})$  ( $N_Z$  zu  $\|\cdot\|_\infty$  verträgliche Matrixnorm)

$$\begin{aligned} L &= \max_{i=1,2,3} \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = \max \left\{ \left| \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{1}{6} \right|, \left| \frac{3}{4} \right|, \left| \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \|x^{(k)} - x\|_\infty &\leq \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^k}{1 - \frac{3}{4}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{3^k \cdot 4}{4^k \cdot 1} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \\ 9 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot 27 \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1/2 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3:

- (a) Gegeben seien die Matrix  $A$  und der Vektor  $b$  aus Aufgabe 2. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix  $A$  und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ .
- (b) Wie wirkt sich bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  eine Störung  $\Delta b$  der rechten Seite  $b$  auf den relativen Fehler der Lösung  $x$  aus?

### Lösung:

- (a) LR-Zerlegung mit Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc} 6 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \begin{array}{l} \\ 2.Z.=2.Z.+1/2 \cdot 1.Z. \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 6 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 3.Z.=3.Z.+1/3 \cdot 2.Z. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 6 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{13}{6} \end{array}$$
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1/2}, \quad R = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} \end{pmatrix} \quad \boxed{1/2}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LRx = b \text{ und } y := Rx$$

- (1) Löse  $Ly = b$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & y_1 = 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & y_2 = 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 13 & y_3 = 13 \end{array} \quad \boxed{1/2}$$

- (2) Löse  $Rx = y$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -2 & 1 & 2 & x_1 = -1 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & x_2 = -1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & 13 & x_3 = 6 \end{array} \quad \boxed{1/2}$$

- (b)

$$A(x + \Delta x) = (b + \Delta b), \quad Ax = b \Rightarrow A\Delta x = b$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq N(A^{-1})\|\Delta b\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq N(A)\|x\| \Rightarrow \frac{\|b\|}{N(A)} \leq \|x\| \quad \boxed{1}$$

$$\text{Insgesamt folgt: } \frac{\|\Delta x\|}{x} \leq N(A)N(A^{-1})\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \text{cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad \boxed{1}$$



**Aufgabe 5:**

(a) Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x - \cos^2(\pi x)$ .

Berechnen Sie das Interpolationspolynom  $p_3$  zu  $f$  bezüglich  $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$  und  $x_3 = 1$  in Newton-Gestalt. Zeigen Sie, dass gilt

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{12} \pi^4.$$

Hinweis:  $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ .

(b) Geben Sie die Definition eines kubischen Splines an. Welche Arten von Randvorgaben können sinnvoll vorgegeben werden? Welche der Funktionen  $s_i : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind kubische Splines bezüglich des Gitters  $\Delta := \{0, 1, 2\}$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$s_1(x) = \begin{cases} -6x + 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 - 3x + x^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$s_2(x) = x^4 - x$$

$$s_3(x) = |x - 1|$$

**Lösung:**

(a) Berechnung der dividierten Differenzen für die Newton-Darstellung:

$x$	$f(x)$				
$x_0 = -1$	$[x_0] = -1 - \cos^2(-\pi) = -2 = \alpha_0$				
$x_1 = -\frac{1}{2}$	$[x_1] = -\frac{1}{2} - \cos^2(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$	$\backslash$	$\frac{-\frac{1}{2} + 2}{-\frac{1}{2} + 1} = 3 = \alpha_1$		
$x_2 = \frac{1}{2}$	$[x_2] = \frac{1}{2} - \cos^2(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$	$\backslash$	$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$	$\backslash$	$\frac{1-3}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{4}{3} = \alpha_2$
$x_3 = 1$	$[x_3] = 1 - \cos^2(\pi) = 0$	$\backslash$	$\frac{0 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -1$	$\backslash$	$\frac{-1-1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$
				$\backslash$	$\frac{-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1+1} = 0 = \alpha_3$

1

$$p_3(x) = \sum_{k=0}^3 \alpha_k \omega_k(x) = -2 \cdot 1 + 3\omega_1(x) - \frac{4}{3}\omega_2(x) + 0 \cdot \omega_3(x) = -2 + 3(x+1) - \frac{4}{3}(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}$$

1/2

Nach der Restgliedformel von Cauchy folgt:

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{(3+1)!} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(3+1)}(x)| \max_{x \in [-1,1]} |\omega(x)|$$

Bestimmung des Maximums von  $f^{(4)}(x)$ :

$$f'(x) = 1 + 2\pi \cos(\pi x) \sin(\pi x)$$

$$f''(x) = 2\pi[-\pi \sin^2(\pi x) + \pi \cos^2(\pi x)] = 2\pi^2 \cos(2\pi x)$$

$$f^{(3)}(x) = -4\pi^3 \sin(2\pi x)$$

$$f^{(4)}(x) = -8\pi^4 \cos(2\pi x)$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [-1,1]} |f^{(4)}(x)| = 8\pi^4$$

1/2

Bestimmung des Maximums von  $\omega(x)$ :

$$\omega(x) = (x+1) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-1) = (x^2 - 1) \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$$

Bestimme Ableitung von  $\omega(x)$  und setze diese Null, um Maxima/Minima zu finden:

$$\omega'(x) = 4x^3 - \frac{5}{2}x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$\text{damit } \omega(-1) = \omega(1) = 0, \omega(0) = \frac{1}{4}, \omega\left(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}\right) = -\frac{9}{64}$$

$$\max_{x \in [-1,1]} |\omega(x)| = \max_{x \in [-1,1]} \left| x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4} \right| = |\omega(0)| = \frac{1}{4} \quad \boxed{1/2}$$

Damit folgt insgesamt:

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot 8\pi^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\pi^4 \quad \boxed{1/2}$$

(b) Definition:  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt kubischer Spline bezüglich des Gitters  $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ , falls gilt

$$(1) \quad s|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathcal{P}_3, \quad j = 1, \dots, n$$

$$(2) \quad s \in C^2([x_0, x_n]) \quad \boxed{1/2}$$

Sinnvolle Randvorgaben sind:

$$(a) \quad s'(x_0) = y_0^I, \quad s'(x_n) = y_n^I$$

$$(b) \quad s''(x_0) = s''(x_n) = 0 \quad \boxed{1/2}$$

- $s_1(x) : s_1|_{[0,1]}$  und  $s_1|_{[1,2]} \in \mathcal{P}_3$

$$s_1(1)|_{[0,1]} = -6 + 3 = -3 = -1 - 3 + 1^3 = s_1(1)|_{[1,2]}$$

$$s_1'(1)|_{[0,1]} = -6 + 6 \cdot 1 = 0 = -3 + 3 \cdot 1^2 = s_1'(1)|_{[1,2]}$$

$$s_1''(1)|_{[0,1]} = 6 = s_1''(1)|_{[1,2]} \quad \boxed{1}$$

- $s_2(x) : \notin \mathcal{P}_3 \Rightarrow$  kein kubischer Spline  $\boxed{1/2}$

- $s_3(x) : \text{nicht differenzierbar für } x = 1, \text{ deshalb kein kubischer Spline} \quad \boxed{1/2}$

**Aufgabe 6:**

(a) Von einer Funktion  $f \in C([0, 4])$  seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(0) = 5, f(1) = 1, f(2) = -\frac{3}{2}, f(3) = -\frac{11}{2}, f(4) = -5$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktionswerte das Romberg-Schema für das Integral

$$I = \int_0^4 f(x) dx.$$

(b) Bestimmen Sie eine Quadraturformel mit den Knoten  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$  und  $x_4 = 2$  und dem Exaktheitsgrad 3 zur näherungsweisen Berechnung von  $I = \int_0^2 f(x) dx$ .

**Lösung:**

(a) Romberg-Schema:

$$T_{0,n} = h_n \sum_{j=0}^{2^n - 1} f(a + jh_n), \quad T_{m,n} = \frac{4^m T_{m-1,n+1} - T_{m-1,n}}{4^m - 1}$$

Es sind 5 Funktionswerte gegeben:  $a = 0, b = 4, h_n = \frac{b-a}{2^n}, n = 0, 1, 2$ .

$$T_{0,0} = h_0 \left( \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(4) \right) = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = 0$$

$$T_{0,1} = h_1 \left( \frac{1}{2} f(0) + f(2) + \frac{1}{2} f(4) \right) = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = -3$$

$$T_{0,2} = h_2 \left( \frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \frac{1}{2} f(4) \right) = 1 \left( \frac{1}{2} \cdot 5 + 1 - \frac{3}{2} - \frac{11}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = -6$$

$T_{0,i}$	$T_{1,i} = \frac{4T_{0,i+1} - T_{0,i}}{3}$	$T_{2,i} = \frac{4^2 T_{1,i+1} - T_{1,i}}{4^2 - 1}$
$T_{0,0} =$	$\swarrow$	
$T_{0,1} = -3$	$\xrightarrow{4/3}$ $\swarrow$	$T_{1,0} = -4$
$T_{0,2} = -6$	$\xrightarrow{4/3}$	$T_{1,1} = -7$
	$\swarrow$	$\xrightarrow{16/15}$
		$T_{2,0} = \frac{4}{15} - 7 \frac{16}{15} = \frac{4}{15}(1 - 28) = -\frac{108}{15} = -\frac{36}{5}$

(b) Eine QF besitzt Exaktheitsgrad 3  $\iff \int_a^b p(x) dx = \sum_{j=1}^4 \omega_j p(x_j) \quad \forall p \in \mathcal{P}_3$  1/2

$$p \in \mathcal{P} : p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\Rightarrow \int_0^2 p(x) dx = 2a + 2b + \frac{8}{3}c + 4d \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^4 \omega_j p(x_j)$$

$$= \omega_1 a + \omega_2 \left( a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}d \right) + \omega_3 (a + b + c + d) + \omega_4 (a + 2b + 4c + 8d) \quad \boxed{1/2}$$

Löse LGS für die  $\omega'_j$ s:

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & \frac{1}{2} & 1 & 2 & & \frac{1}{2} & 1 & 2 & & & 1 & 2 & 4 & & & 1 & 2 & 4 & & 4 \\ & & \frac{1}{4} & 1 & 4 & & \frac{1}{2} & 3 & \frac{5}{2} & & & & 1 & 6 & \frac{10}{3} & & & 1 & 6 & \frac{10}{3} \\ & & \frac{1}{8} & 1 & 8 & & \frac{3}{4} & \frac{15}{2} & \frac{7}{2} & & & & 1 & 10 & \frac{14}{3} & & & 4 & \frac{4}{3} \end{array} \rightarrow \Rightarrow \omega_4 = \frac{1}{3}, \omega_3 = \frac{4}{3}, \omega_2 = 0, \omega_1 = \frac{1}{3} \quad \boxed{1}$$

**Aufgabe 7:**

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$ , welche auf  $[0, 2\pi)$  gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

(b) Gegeben seien die Bézier-Punkte  $(0, 0), (\frac{1}{3}, 1), (\frac{2}{3}, 2), (1, 1)$ . Bestimmen Sie die Bézier-Darstellung des Polynoms  $p(x)$  zu den Bézier-Punkten und geben Sie die Definition der zugehörigen Bernstein-Grundpolynome an. Berechnen Sie  $p(\frac{1}{3})$  mit dem Algorithmus von de Casteljau und skizzieren Sie den Graph des Polynoms sowie das Bézier-Polygon für  $x \in [0, 1]$  in einem Schaubild.

**Lösung:**

(a)

$$\hat{F}_k \sim \frac{\hat{\alpha}_0}{2} + \sum_{l=1}^k \hat{\alpha}_l \cos lx + \hat{\beta}_l \sin lx \quad \boxed{1/2}$$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 1$$

$$\hat{\alpha}_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos lxdx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos lxdx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin lx}{l} \Big|_0^{\pi} = 0 \quad \boxed{1/2}$$

$$\hat{\beta}_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin lxdx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin lxdx = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos lx}{l} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{l\pi} [(-1)^l - 1] \quad \boxed{1/2}$$

$$\hat{F}_k \sim 1 + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l\pi} [1 - (-1)^l] \sin lx \quad \boxed{1/2}$$

(b)

$$p(x) = \sum_{i=0}^3 \beta_i b_{i3}(x) \quad \boxed{1/2}$$

mit  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \beta_3 = 1 \quad \boxed{1/2}$

und  $b_{i3}(x) = \binom{3}{i} x^i (1-x)^{3-i} \quad \boxed{1/2}$

Schema von de Casteljau zur Berechnung von  $p(\frac{1}{3})$ :

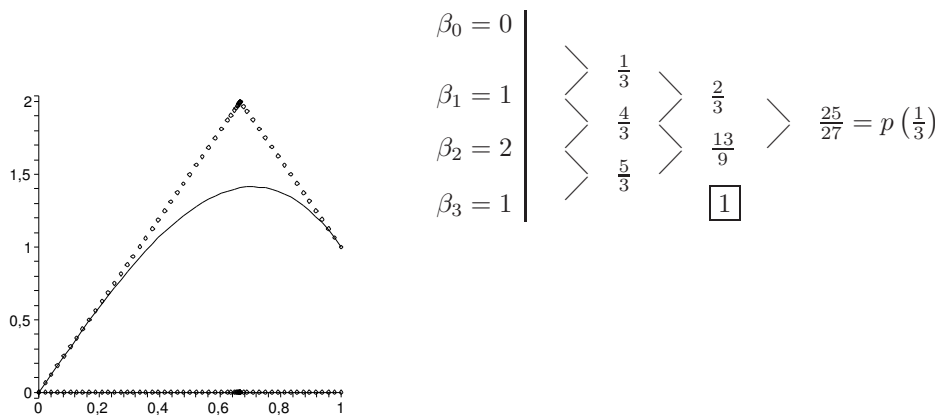


Abbildung 1: Polynom  $p$  liegt in der konvexen Hülle der Bezier-Punkte  $\boxed{1/2}$