



UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer, Dipl.-Math. techn. M. Lehn

Klausur

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen (SS 2004)

23. Februar 2005, 9:00 – 11:00 Uhr

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr. :

Aufgabe	1			2			3		4			5			6		Σ
	a	b	c	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	
max. Pkte.	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	3	2	2	2	3	3	34
err. Pkte.																	

Hinweise:

1. Zugelassen zur Klausur sind alle Studierenden, die im Übungsbetrieb des SS 04 **mindestens 20 Punkte** erreicht haben.
2. Hilfsmittel wie Skripten, Vorlesungsmitschriften, Bücher, Taschenrechner, etc. sind **nicht** erlaubt.
3. Verwenden Sie bitte für jede Aufgabe ein **neues Blatt**, und versehen Sie es mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.
4. Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis bereit.
5. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
6. Zum Bestehen der Klausur sind **14 Punkte** hinreichend.

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x^3$.

- Zeigen Sie, dass $g(x)$ im Intervall $[0, 1]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in [0, 1]$ gegen x^* konvergiert.
- Ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ liefert das Iterationsverfahren $x_{n+1} = g(x_n)$ die Näherungen $x_4 = 0.5619$ und $x_5 = 0.5625$.
Schätzen Sie den Abstand von x_5 zum Fixpunkt x^* sowohl mit der a-priori als auch mit der a-posteriori Formel ab.
- Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von g .

Aufgabe 2:

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass das Einzelschrittverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für einen beliebigen Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ konvergiert.
- Ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0, 1, 2)^T$ soll das Einzelschrittverfahren zur Lösung des LGS $Ax = b$ eingesetzt werden.
Zeigen Sie, dass gilt: $\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \frac{3}{2^{k+1}}$.
- Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A und lösen Sie damit das LGS $Ax = b$.

Aufgabe 3:

- Zur Berechnung des Integrals $I = \int_0^2 g(x) dx$ soll eine Quadraturformel mit den Knoten $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ verwendet werden.
Bestimmen Sie die Gewichte ω_1 , ω_2 und ω_3 , sodass die Quadraturformel den Exaktheitsgrad $m = 2$ besitzt.
- Von einer Funktion $f \in C^2([-1, 1])$ seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(-1) = -2, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad f(0) = 2, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{und} \quad f(1) = 2.$$

Nähern Sie das Integral $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ mit der zusammengesetzten Trapezregel unter Verwendung aller gegebenen Funktionswerte an.

Schätzen Sie unter der Voraussetzung $|f''(x)| \leq 12$ ($x \in [-1, 1]$) den Fehler ab.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das Polynom $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 12$.

- (a) Entwickeln Sie $p(x)$ nach Potenzen von $(x - 2)$ mit Hilfe des vollständigen Hornerchemas und lesen Sie aus dem Schema $p'''(2)$ ab.
- (b) Zeigen Sie, dass die Nullstellen von $p(x)$ betragsmäßig kleiner gleich 7 sind.
- (c) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in den Intervallen $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ zu bestimmen.

Aufgabe 5:

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Lagrange-Grundpolynome die Existenz eines Interpolationspolynoms $p_n \in \mathcal{P}_n$ zu einer Funktion f bezüglich der Knoten x_0, \dots, x_n .
- (b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_3 zur Funktion $f = \sin(\pi x)$ bezüglich $x_0 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$ in Newton-Gestalt und zeigen Sie, dass gilt

$$\max_{x \in [-\frac{1}{2}, 1]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{32} \pi^4.$$

- (c) Geben Sie die Definition der Tschebyscheff-Polynome an und beweisen Sie die dreigliedrige Rekursionsformel.
(Hinweis: $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$)

Aufgabe 6:

- (a) Welche der folgenden Funktionen $s_i : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) sind kubische Splines bezüglich des Gitters $\Delta = \{-1, 0, 1\}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$s_1(x) = x^5 - x^3,$$

$$s_2(x) = x^2 + |x^3|,$$

$$s_3(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & x \in [-1, 0], \\ x^3 - x^2, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

- (b) Gegeben sei das Polynom $p(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 9x^3$.

Bestimmen Sie die Bézier-Darstellung für $p(x)$.

Berechnen Sie $p(\frac{1}{3})$ mit dem Algorithmus von de Casteljau.

Skizzieren Sie den Graph des Polynoms sowie das Bézier-Polygon für $x \in [0, 1]$ in einem Schaubild.

Aufgabe 1 $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x^3$

a) Zu zeigen: Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

i) $[0,1]$ abgeschlossenes Intervall ✓

ii) $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ (Selbstabbildung):

g monoton steigend in $[0,1]$, da x^2, x^3 monoton st. in $[0,1]$.

$$\Rightarrow 0 \leq g(0) = \frac{1}{2} \leq g(x) \leq g(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{13}{18} \leq 1, \quad x \in [0,1]$$

iii) g kontrahierend in $[0,1]$:

$g'(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2$ monoton steigend in $[0,1]$ (da x, x^2 m.st.)

$$\Rightarrow g'(0) = 0 \leq g'(x) \leq g'(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0,1]} |g'(x)| = \frac{1}{2} =: L, \quad g \text{ Kontraktion mit } L = \frac{1}{2} < 1.$$

\Rightarrow Aussage

b) A-priori Fehlerabschätzung: $|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

$$x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = g(x_0) = g(0) = \frac{1}{2}, \quad L = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$|x_5 - x^*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \approx 0,031$$

A-posteriori Fehlerabschätzung: $|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$

$$x_4 = 0,5619, \quad x_5 = 0,5625 \Rightarrow |x_5 - x^*| \leq 1 \cdot 0,0006 = 0,0006$$

c) Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von g ($g(x)=0$) zum Startwert x_0 :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad n=0,1,\dots \quad \left(g'(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2\right)$$

Aufgabe 2 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) $T_{ESV} = -(D+L)^{-1}U$

$$D+L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{Somit: } T_{ESV} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho_2(T_{ESV}) = \frac{1}{2} < 1, \text{ also konvergiert das ESV.}$$

b) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^{(k+1)} = T_{ESV} x^{(k)} + g, g = (D+L)^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

A-priori Fehlabschätzung:

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{\rho_2(T_{ESV})^k}{1 - \rho_2(T_{ESV})} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty} \quad (\|\cdot\|_{\infty} \text{ und } \rho_2(\cdot) \text{ verträglich})$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^k}{1 - \frac{1}{2}} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2^{k+1}}$$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-\frac{1}{4}) \\ \uparrow \\ (-\frac{1}{4}) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} (-\frac{1}{2}) \\ \uparrow \\ (-\frac{1}{2}) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \Leftrightarrow L \cdot \underbrace{Rx}_y = b \Leftrightarrow Ly=b, Rx=y$$

$$Ly=b: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & | & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$Rx=y: \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$a) \int_0^2 g(x) dx, \quad Q_g = \sum_{i=1}^3 \omega_i g(x_i), \quad x_1=0, x_2=1, x_3=2$$

Exaktheitsgrad $m=2$

$$\int_0^2 1 dx = 2 \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^3 \omega_i \cdot 1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad (m=0)$$

$$\int_0^2 x dx = 2 \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i = \omega_2 + 2\omega_3 \quad (m=1)$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i^2 = \omega_2 + 4\omega_3 \quad (m=2)$$

$$\text{LGS für } \omega_1, \omega_2, \omega_3: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{8}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{3}, \omega_2 = \frac{4}{3}, \omega_3 = \frac{1}{3} \quad (\text{Kepler-Regel})$$

$$b) f(-1) = -2, f(-\frac{1}{2}) = -1, f(0) = 2, f(\frac{1}{2}) = 1, f(1) = 2$$

Zusammengesetzte Trapezregel zu Schrittweite $h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} f(-1) + f(-\frac{1}{2}) + f(0) + f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f(1) \right) \\ &= \frac{1}{2} (-1 - 1 + 2 + 1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |I_f - T_f| &\leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad (|f''(x)| \leq 12, x \in [-1,1]) \\ &= \frac{2^3}{12} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 12 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$([a,b] = [-1,1], h = \frac{b-a}{n})$$

Aufgabe 4 $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 12$

a) Vollständiges Horner Schema für $x=2$:

$$\begin{array}{r}
 x=2 \quad \begin{array}{r} 2 \quad -6 \quad -12 \quad 12 \\ \underline{\quad} \quad 4 \quad -4 \quad -32 \\ 2 \quad -2 \quad -16 \quad \boxed{20} \\ \underline{\quad} \quad 4 \quad 4 \quad \end{array} = p(2) \\
 x=2 \quad \begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad \boxed{-12} \\ \underline{\quad} \quad 4 \quad \end{array} = p'(2) \\
 x=2 \quad \begin{array}{r} 2 \quad \boxed{6} \\ \underline{\quad} \quad \end{array} = \frac{1}{2!} p''(2) \\
 x=2 \quad \begin{array}{r} \boxed{2} \\ \underline{\quad} \quad \end{array} = \frac{1}{3!} p'''(2) \Rightarrow p'''(2) = 12
 \end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = 2(x-2)^3 + 6(x-2)^2 - 12(x-2) - 20$$

b) Gerschgorin für $\tilde{p}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$

$p(x)$ normieren: $\tilde{p}(x) = \frac{1}{2}p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$ hat dieselben Nullstellen wie p

i) $r \leq \max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\} = \max\{1, 3+6+6\} = 15$

ii) $r \leq \max\{|a_0|, 1+|a_1|, \dots, 1+|a_{n-1}|\} = \max\{6, 7, 4\} = 7$

\Rightarrow Alle NS ξ_i von p liegen in $\mathbb{K}(0,7)$, also $|\xi_i| \leq 7$.

c) $\tilde{p}(x) = \frac{1}{2}p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$ hat dieselben NS wie p . $p_0 := \tilde{p}$

$\tilde{p}'(x) = 3x^2 - 6x - 6$, setze $p_1(x) = x^2 - 2x - 2$

Bilde Sturmsche Kette mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{array}{l}
 p_0 : p_1 \quad \begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - 6x + 6) : (x^2 - 2x - 2) = x - 1 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2 - 2x)} \\ \quad -x^2 - 4x + 6 \\ \quad \underline{-(-x^2 + 2x + 2)} \\ \quad \quad -6x + 4 \end{array} \Rightarrow p_0(x) = (x-1)p_1(x) - (6x-4) \\
 \text{setze } p_2(x) = 3x - 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 p_1 : p_2 \quad \begin{array}{r} (x^2 - 2x - 2) : (3x - 2) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \\ \underline{-(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x)} \\ \quad -\frac{4}{3}x - 2 \\ \quad \underline{-(-\frac{4}{3}x + \frac{8}{9})} \\ \quad \quad -\frac{26}{9} \end{array} \Rightarrow p_1(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})p_2(x) - (\frac{26}{9}) \\
 \text{setze } p_3(x) = 1
 \end{array}$$

p_0, p_1, p_2, p_3 bilden eine Sk auf $[-1,1]$. VZW bei $\pm 1, 0$:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	VZW
-1	+	+	-	+	2 \Rightarrow keine NS in $[-1,0]$
0	+	-	-	+	2 \Rightarrow 1 NS in $[0,1]$
1	-	-	+	+	1 \Rightarrow 1 NS in $[0,1]$

Aufgabe 5

a) Sei $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \in \mathcal{P}_n$, $i=0, \dots, n$

Es gilt $l_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, \dots, n$

Also gilt $p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \in \mathcal{P}_n$ und
 $p(x_i) = f(x_i)$, $i=0, \dots, n$.

b) Newton-Schema:

x $f(x) = \sin(\pi x)$

$-\frac{1}{2}$	-1	}	$\frac{1}{\frac{1}{2}} =$	2	}	$\frac{0}{1} =$	0	}	$\frac{-4}{\frac{3}{2}} =$	$-\frac{8}{3}$
0	0	}	$\frac{1}{\frac{1}{2}} =$	2	}	$\frac{-4}{1} =$	-4	}		
$\frac{1}{2}$	1	}	$\frac{-1}{\frac{1}{2}} =$	-2	}					
1	0	}								

$\Rightarrow p_3(x) = -1 + 2(x + \frac{1}{2}) + 0 \cdot (x + \frac{1}{2}) \cdot x - \frac{8}{3}(x + \frac{1}{2})x(x - \frac{1}{2})$

$f(x) - p_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \omega(x)$, $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, $\xi(x) \in (-\frac{1}{2}, 1)$

$f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin \pi x \Rightarrow \max_{x \in [-\frac{1}{2}, 1]} |f^{(4)}(x)| = \pi^4$

$|\omega(x)| = |(x + \frac{1}{2})x(x - \frac{1}{2})(x - 1)| \leq \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$

$\Rightarrow \max_{x \in [-\frac{1}{2}, 1]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \pi^4 \frac{9}{4} = \frac{3}{32} \pi^4$

c) Def.: $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Rek.: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$

Bew.: $T_0(x) = \cos(0 \cdot \arccos x) = \cos(0) = 1$

$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$

$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos x) = \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(n \arccos x) \cdot \sin(\arccos x)$

$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\arccos x) = \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) + \sin(n \arccos x) \cdot \sin(\arccos x)$

$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cdot \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) = 2xT_n(x)$ \square

Aufgabe 6

a) $S_1: S_1|_{[-1,0]} = S_1|_{[0,1]} = x^5 - x^3 \notin \mathcal{P}_3 \Rightarrow S_1$ kein kub. Spline bzgl. Δ

$$S_2: S_2(x) = \begin{cases} x^2 - x^3 \\ x^2 + x^3 \end{cases}, S_2'(x) = \begin{cases} 2x - 3x^2 \\ 2x + 3x^2 \end{cases}, S_2''(x) = \begin{cases} 2 - 6x, & x \in [-1, 0] \\ 2 + 6x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$x^2 - x^3, x^2 + x^3 \in \mathcal{P}_3$$

$$S_2(0+) = S_2(0-) = 0, S_2'(0+) = S_2'(0-) = 0, S_2''(0+) = S_2''(0-) = 2$$

also ist $S_2 \in C^2([-1, 1])$ und somit ein kub. Spline bzgl. Δ

$$S_3: S_3(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 \\ x^3 - x^2 \end{cases}, S_3'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x \\ 3x^2 - 2x \end{cases}, S_3''(x) = \begin{cases} 6x + 2, & x \in [-1, 0] \\ 6x - 2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$S_3''(0-) = 2, S_3''(0+) = -2 \Rightarrow S_3 \text{ ist kein kub. Spline bzgl. } \Delta$$

b) $p(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 9x^3$

Bernsteinpolynome: $b_{v,n}(x) = \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v}$

$$b_{0,3}(x) = (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

$$b_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2 = 3x - 6x^2 + 3x^3$$

$$b_{2,3}(x) = 3x^2(1-x) = 3x^2 - 3x^3$$

$$b_{3,3}(x) = x^3 = x^3$$

$$\Rightarrow p(x) = 1 \cdot b_{0,3}(x) + 2 \cdot b_{1,3}(x) + 2 \cdot b_{2,3}(x) - 8 \cdot b_{3,3}(x)$$

Algorithmus von de Casteljau ($p(\frac{1}{3})$):

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \swarrow 1-\frac{1}{3} & & & & & \\ & \frac{2}{3} & & & & & \\ 2 & \swarrow \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \swarrow \frac{2}{3} & & & \\ & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{9} & \swarrow \frac{2}{3} & & \\ 2 & \swarrow \frac{2}{3} & 2 & \frac{14}{9} & \frac{36}{27} = \frac{4}{3} = p(\frac{1}{3}) & & \\ & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{8}{9} & \swarrow \frac{1}{3} & & \\ -8 & \swarrow \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & & & \end{array}$$

Bezier-Punkte:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

