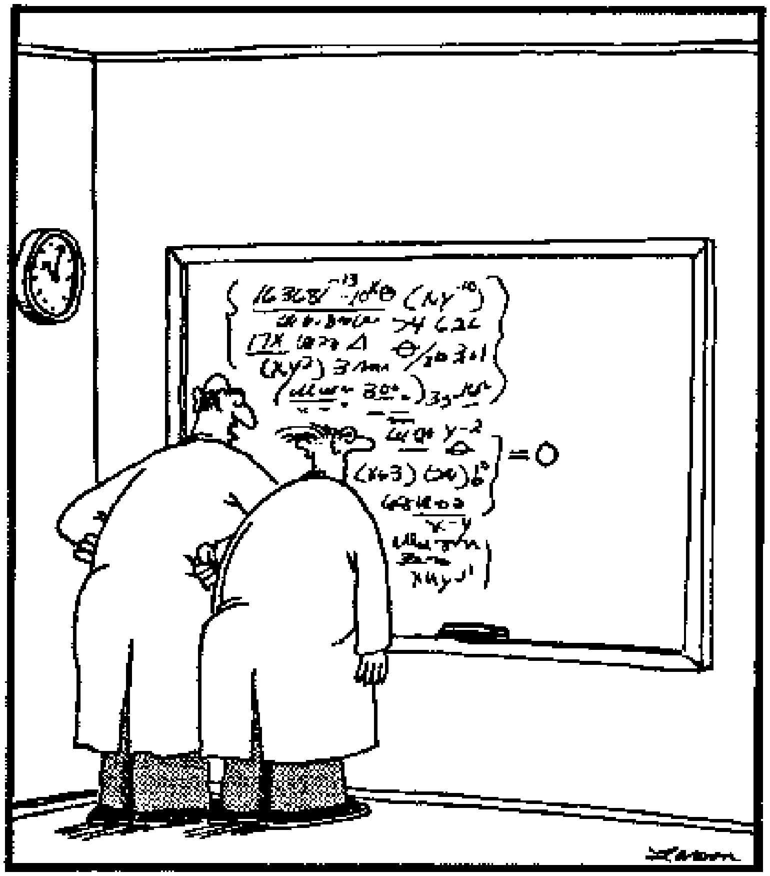
Numerik für Infos, SS 1998

Dozent: Prof. Dr. R. Scherer



"No doubt about it, Ellington - we've mathematically expressed the purpose of the universe. God, how I love the thrill of scientific discovery!"

GeTEXt von Jan Oberländer <mindriot@gmx.net>
Herausgegeben von der Fachschaft Mathematik / Informatik
Vorfinanziert mit Hilfe der UStA-Beitragsmarke
gedruckt beim StudentenServiceVerein
Auflage 300 Preis **1,- DM**

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$\varphi : [0,3] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \sqrt[3]{x+8}.$$

(a) Man zeige, dass φ im Intervall $[0,3]$ genau einen Fixpunkt besitzt. 2 Punkte

(b) Wie viele Schritte des Iterationsverfahrens

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sind erforderlich, um ausgehend von $x_0 = 0$ den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von 10^{-4} zu bestimmen?
Hinweis: $12^3 = 1728, 12^4 = 20736$. 2 Punkte

Aufgabe 2

(a) Man erläutere das Einzelschrittverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ und gebe ein Konvergenzkriterium an, welches notwendig und hinreichend ist. 2 Punkte

(b) Man zeige, dass das Einzelschrittverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

für jede Wahl des Startvektors $x^{(0)}$ konvergiert. Ausgehend von $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ führe man zwei Iterationsschritte durch. 3 Punkte

(c) Man löse das Gleichungssystem $Ax = b$ aus (b) mittels CHOLESKY-Zerlegung. 2 Punkte

Aufgabe 3

Gegeben sei das Polynom

$$p(x) := 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6.$$

(a) Mit Hilfe des vollständigen HORNER-Schemas entwickle man p nach Potenzen von $(x+3)$ und gebe sämtliche Ableitungen von p an der Stelle $x_0 = -3$ an. 2 Punkte

(b) Mit Hilfe des Satzes von STURM bestimme man die Anzahl der Nullstellen von p im Intervall $[0,4]$. 2 Punkte

Aufgabe 4

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \text{ mit } \gamma \neq 0 \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Man beweise, dass das Gleichungssystem $Ax = c$ nicht lösbar ist. 1 Punkt

(b) Man bestimme mit Hilfe der Normalgleichungen ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$, so dass die EUKLIDsche Norm von $r(\tilde{x}) = c - A\tilde{x}$ minimal wird. 2 Punkte

(c) Sei $\gamma = 0.1$. Die rechte Seite der Normalgleichungen sei mit einem relativen Fehler (bezüglich der Maximumnorm) von ≤ 0.01 bekannt. Man berechne für diesen Fall eine obere Schranke des relativen Fehlers der Lösung $\tilde{x}$ der Normalgleichungen. 3 Punkte

Aufgabe 5

(a) Man berechne auf dem Intervall $-2 \leq x \leq 2$ das Interpolationspolynom p zu $f(x) = \frac{2}{3+x}$ bezüglich der Knoten $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. 2 Punkte

(b) Man zeige für das Interpolationspolynom aus (a), dass auf dem Intervall $-2 \leq x \leq 2$ die Fehlerabschätzung $||p - f||_\infty \leq 8$ gültig ist. 2 Punkte

(c) Die Funktion $s : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$s(x) := \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \left(x^3 + 6x^2 + 5x + 6\right) & \text{für } x \in [-2, -1) \\ \frac{1}{6} \cdot \left(-x^3 - x + 4\right) & \text{für } x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{6} \cdot (-x + 4) & \text{für } x \in [0, 1] \end{cases} .$$

Man zeige, dass $s(x)$ ein kubischer Spline ist, dass $s(x)$ die Funktion $f(x)$ an den Knoten $\xi_0 = -2$, $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$ interpoliert und dass die zweite Ableitung von $s(x)$ in $x = -2$ und $x = 1$ verschwindet. 2 Punkte

Aufgabe 6

Gegeben sei das Integral

$$I := \int_1^5 \frac{1}{(1+x)} dx = \ln 3.$$

(a) Wieviele Funktionsauswertungen des Integranden sind erforderlich, um mit der iterierten Trapez-Regel einen Näherungswert T_N mit $|I - T_N| \leq 10^{-2}$ zu erreichen? 2 Punkte

(b) Für das gegebene Integral bestimme man Näherungen durch Berechnung der ersten drei Zeilen des ROMBERG-Schemas für die Trapezregel. 2 Punkte

(c) Man gebe die allgemeine Rechenvorschrift und die Fehlerformel der KEPLERschen Faßregel an. 1 Punkt

Lösung zu Aufgabe 6

(a) Fehlerformel für die iterierte Trapezregel (n=Anzahl der Intervalle):

$$|I - T_N| \le \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot ||f''||_\infty$$

Hier: $b - a = 4, \quad f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \Longrightarrow ||f''||_\infty = \dfrac{1}{4}$

Damit: $|I - T_N| \le \dfrac{4^3}{12} \cdot \dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{n^2} \overset{!}{<} \dfrac{1}{100}$

$\Longrightarrow n^2 \overset{!}{>} 133.\overline{3} \overset{(12^2=144)}{\Longrightarrow}$ mindestens 12 Intervalle, und somit mindestens 12+1=13 Funktionsauswertungen.

(b)
- 1. Spalte:

$$\begin{aligned}
T_{00} &= 4 \cdot \frac{1}{2}(f(1) + f(5)) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\
T_{10} &= 2 \cdot \frac{1}{2}(f(1) + 2f(3) + f(5)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6} \\
T_{20} &= \frac{1}{2}(f(1) + 2f(2) + 2f(3) + 2f(4) + f(5)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{67}{60}
\end{aligned}$$

- 2. Spalte:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{4T_{10} - T_{00}}{3} = \frac{4 \cdot 7 - 8}{3 \cdot 6} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9} \\
T_{21} &= \frac{4T_{20} - T_{10}}{3} = \frac{4 \cdot 67 - 70}{3 \cdot 60} = \frac{198}{180} = \frac{11}{10}
\end{aligned}$$

- 3. Spalte

$$T_{22} = \frac{16T_{11} - T_{21}}{15} = \frac{16\frac{11}{10} - \frac{10}{9}}{15} = \frac{16 \cdot 99 - 100}{15 \cdot 90} = \frac{1600 - 16 - 100}{1350} = \frac{1484}{1350} = \frac{742}{675}$$

Lösungen

Aufgabe 1

(a) Zu zeigen: $\varphi(x)$ genügt auf $I := [0,3]$ den Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes. Dann folgen Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes.

- I ist abgeschlossenes Intervall
- Selbstabbildung:
  $\varphi'(x) = \dfrac{1}{3}(x+8)^{-\frac{2}{3}} > 0, \quad$ d.h. φ ist streng monoton wachsend
  $\varphi(0) = \sqrt[3]{8} = 2 \in [0,3], \quad \varphi(3) = \sqrt[3]{11} < \sqrt[3]{27} = 3$
  $\Longrightarrow \ \varphi(I) \subseteq I, \quad$ also ist φ Selbstabbildung
- Kontraktion:
  $0 < \varphi'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}} \leq \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{12} < 1 \quad$ für $x \in [0,3]$
  $\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \varphi$ Kontraktion, Kontraktionskonstante $L = \dfrac{1}{12}$.
  Somit existiert nach dem BANACHschen Fixpunktsatz ein eindeutiger Fixpunkt von φ in $[0,3]$.

(b) Nach dem BANACHschen Fixpunktsatz konvergiert x_n gegen x^* und es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}\,|x - x_0|$$

Aus $x_0 = 0$ folgt $x_1 = \sqrt[3]{8} = 2$

$\Longrightarrow |x_n - x^*| \leq \dfrac{\left(\frac{1}{12}\right)^n}{\frac{11}{12}} \cdot 2 = \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{2}{11} \overset{(\star)}{<} 10^{-4}$

$\Longleftrightarrow \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} < 5.5 \cdot 10^{-4} = 0.00055$

Beweis für $(\star)$: $12^2 = 144, \quad 12^3 = 1728, \quad 12^4 = 20736 \Longrightarrow n-1 \geq 4 \Longleftrightarrow n \geq 5$. Nach 5 Iterationsschritten ist der Fehler kleiner als 10^{-4}.

Aufgabe 2

(a) (i) Seien L der linke untere Dreiecksanteil der Matrix A, U der rechte obere Anteil sowie D der diagonale Anteil:

$$A := L + D + U = \begin{pmatrix} D & U & \cdots & \cdots & U \\ L & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & D & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & U \\ L & \cdots & \cdots & L & D \end{pmatrix}$$

(ii) $Ax = b \iff (D+L)x = -Ux + b$
Einzelschrittverfahren: $x^{(k+1)} = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{T_E}\, x^{(k)} + \underbrace{(D+L)^{-1}b}_{g}$
Konvergenzkriterium: das Verfahren konvergiert genau dann, wenn $\varrho(T_E) = \varrho\left(-(D+L)^{-1}U\right) < 1$.

(b)

$$L + D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & & \\ 3 & 4 & 0 & & 1 & \\ 0 & -1 & 1 & & & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ & 1 & & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ & & 1 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow T_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = 0, \quad x^{(1)} = T_E \cdot \vec{0} + g = g = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)^T$$

$$x^{(2)} = T_E \cdot x^{(1)} + g = (T_E + I)g = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{25}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{64} \\ \frac{29}{256} \\ \frac{29}{256} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

(a) Vollständiges HORNER-Schema:

	2	−3	−11	6
$x_0 = -3$		−6	27	−48
	2	−9	16	$\underline{\underline{-42}}$
$x_0 = -3$		−6	45	
	2	−15	$\underline{\underline{61}}$	
$x_0 = -3$		−6		
	$\underline{\underline{2}}$	$\underline{\underline{-21}}$		

Damit gilt: $p(x) = 2(x+3)^3 - 21(x+3)^2 + 61(x+3) - 42$

$p(-3) = -42, \quad p'(-3) = 61, \quad p''(-3) = -21 \cdot 2! = -42, \quad p'''(-3) = 2 \cdot 3! = 12$

(b)
- Aufbau einer STURMschen Kette:
  $p_0(x) = p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$
  $p_1(x) = p'(x) = 6x^2 - 6x - 11$
- Euklidscher Algorithmus:
  $$p_0(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) p_1(x) - \underbrace{\left(\frac{25}{3}x - \frac{25}{6}\right)}_{=:p_2(x)}$$
  $$p_1(x) = \left(\frac{18}{25}x - \frac{9}{25}\right) p_2(x) - \underbrace{\frac{25}{2}}_{=:p_3(x)}$$

- Vorzeichenverhalten:

	p_0	p_1	p_2	p_3	VZW
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$x=4$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Nach dem Satz von STURM besitzt p in $[0,4]$ 2 Nullstellen.

Aufgabe 4

(a) Zu zeigen: c liegt nicht in Bild(A)

$$\mathrm{Rang}(A)=3,\quad \mathrm{Rang}(A|c)=\mathrm{Rang}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ \gamma&0&0&0\\ 0&\gamma&0&0\\ 0&0&\gamma&0\end{pmatrix}=4$$

$\Longrightarrow c\notin \mathrm{Bild}(A) \Longrightarrow (Ax=c)$ nicht lösbar.

(b) Normalgleichungen: $A^TA\tilde{x}=A^Tc$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1+\gamma^2&1&1\\ 1&1+\gamma^2&1\\ 1&1&1+\gamma^2\end{pmatrix},\quad A^Tc=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Die Gestalt von A^TA und A^Tc legt folgenden Ansatz nahe:

$$\tilde{x}:=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix},\quad \alpha\in\mathbb{R}\quad\Longleftrightarrow\quad 3\alpha+\gamma^2\alpha=1\quad\Longleftrightarrow\quad \alpha\frac{1}{2+\gamma^2},\quad \text{d.h. } \tilde{x}=\frac{1}{3+\gamma^2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(c) Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^3$ der relative Fehler der rechten Seite A^Tc. Dann gilt nach Vorlesung:

$$\frac{||\varepsilon||_\infty}{||A^Tc||_\infty}$$

Formel nach Vorlesung:

$$\frac{||\Delta\tilde{x}||_\infty}{||\tilde{x}||_\infty}\leq \mathrm{cond}_Z(A^TA)\cdot\frac{||\varepsilon||_\infty}{||A^Tc||_\infty}$$

Konditionszahl:

$$\mathrm{cond}_Z(A^TA)=N_Z\left((A^TA)^{-1}\right)\cdot N_Z(A^TA)$$

Berechnung von $(A^TA)^{-1}$:

Wähle Ansatz: $(A^TA)^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&b\\ b&a&b\\ b&b&a\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow (A^TA)^{-1}(A^TA) &= \begin{pmatrix}1&&\\ &1&\\ &&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a(1+\gamma^2)+2b & b(2+\gamma^2)+a & b(2+\gamma^2)+a\\ b(2+\gamma^2)+a & a(1+\gamma^2)+2b & b(2+\gamma^2)+a\\ b(2+\gamma^2)+a & b(2+\gamma^2)+a & a(1+\gamma^2)+2b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcll} a(1+\gamma^2)+2b &=& 1 & (1)\\ b(2+\gamma^2)+a &=& 0 & (2)\end{array}\right.$$

Aufgabe 5

(a) LAGRANGE:

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)} = -\frac{1}{12}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\\
l_1(x) &= \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{1}{6}\left(x^3-x^2-4x+4\right)\\
l_2(x) &= \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot(-1)} = -\frac{1}{6}\left(x^3+x^2-4x-4\right)\\
l_3(x) &= \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{4\cdot 3\cdot 1} = \frac{1}{12}\left(x^3+2x^2-x-2\right)
\end{aligned}
$$

NEWTON:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_i & f(x_i) & & & \\
-2 & \boxed{2} & & & \\
 & & \boxed{-1} & & \\
-1 & 1 & & \boxed{\frac{1}{4}} & \\
 & & -\frac{1}{4} & & \boxed{-\frac{1}{20}}\\
1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{20} & \\
 & & -\frac{1}{10} & & \\
2 & \frac{2}{5} & & &
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow\ p(x) = 2-(x+2)+\frac{1}{4}(x+2)(x+1)-\frac{1}{20}(x+2)(x+1)(x-1)$$

(b) Fehlerformel:

$$
\begin{aligned}
||p-f||_\infty &\leq \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}||w_{n+1}||_\infty\\
||f^{(n+1)}||_\infty: \quad f^{(k)}_{(x)} &= (-1)^k\cdot k!\cdot 2\cdot(x+3)^{-1-k}\\
\Longrightarrow\quad f^{(4)}_{(x)} &= \frac{48}{(x+3)^5} \Longrightarrow ||f^{(4)}||_\infty = 48\\
||w_{n+1}||_\infty: \quad w_4(x) &= (x+2)(x+1)(x-1)(x+1) = (x^2-4)(x^2-1) = x^4-5x^2+4\\
w_4'(x) &= 4x^3-10x \overset{!}{=} 0\\
\Longrightarrow x=0 &\vee\ 4x^2-10=0\\
\Longleftrightarrow x=0 &\vee\ x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\\
\Longrightarrow ||w_{n+1}||_\infty &= \max\left\{|w_4(\pm 2)|, \left|w_4\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right|, w_4(0)\right\}\\
&= \max\left\{0,\frac{9}{4},4\right\} = 4
\end{aligned}
$$