Prüfung…

Aufgabe 1:

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, daß A weder eine Cholesky- noch eine LR-Zerlegung besitzt.

b) Zeigen Sie, daß $\tilde{A} := AP$ eine LR-Zerlegung besitzt und berechnen Sie diese.

c) Lösen Sie das LGS $Ax = b$, indem Sie die LR-Zerlegung von $\tilde{A}$ verwenden.
Hinweis: Verwenden Sie, daß $P^2 = I_3$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von A.

b) Bestimmen Sie die Singulärwerte von A.

Aufgabe 3:

Gesucht ist $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|b - Ax\|_2^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gaußschen Normalengleichung dieses Minimum und geben Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ an, für den das Minimum angenommen wird.

b) Skizzieren Sie den Lösungsweg dieses Problems mit Hilfe der QR-Zerlegung oder mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, daß sowohl das Gesamtschrittverfahren als auch das cg-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ konvergieren.

b) Zeigen Sie, daß das Einzelschrittverfahren für alle

$$x_\alpha := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

nach einem Schritt die Lösung des LGS gefunden hat.

Aufgabe 5:

Gesucht sind die Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, daß nach einem Schritt des QR-Verfahrens die exakten Eigenwerte von A gefunden sind.

b) Zeigen Sie, daß die Vektoriteration mit dem Startvektor $\binom{1}{0}$ nicht gegen den größten Eigenwert von A konvergiert.

Aufgabe 6:

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Lanczos-Algorithmus eine Orthonormalbasis des Krylov-Raumes

$$V_3(x_0) = \operatorname{span}\{x_0, Ax_0, A^2x_0\}.$$

b) Transformieren Sie mit Hilfe von a) die Matrix A auf Tridiagonalgestalt.

Aufgabe 7:

Gegeben sei $f(x) = 2^{-x}$.

a) Interpolieren Sie f durch ein Polynom p_2 an den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ und durch ein Polynom p_3 an den Stützstellen x_0, x_1, x_2 und $x_3 = 2$.

b) Zeigen Sie, daß

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \le \frac{2\sqrt{3}}{27}(\ln 2)^3$$

ist.

Aufgabe 1

a) (2 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist symmetrisch.}$$

$\det |4| = 4 > 0$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 4 + 4 - 1 - 16 - 4 = -9 < 0$$

$\Rightarrow$ A ist nicht positiv definit

$\Rightarrow$ A besitzt keine Cholesky-Zerlegung

LR-Zerlegung:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$4 = 1 \cdot r_{11} \Rightarrow r_{11} = 4$

$2 = 1 \cdot r_{12} \Rightarrow r_{12} = 2$, $r_{13} = 1$

$2 = l_{21} \cdot 4 \Rightarrow l_{21} = \frac{1}{2}$

$1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot r_{22} \Rightarrow r_{22} = 0$

$1 = l_{31} \cdot 4 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{4}$

$2 = \frac{1}{4} \cdot 2 + 0$ Wid.!

Der Algorithmus bricht zusammen.

$\Rightarrow$ A besitzt keine LR-Zerlegung

b) (2 Punkte)

$$\tilde{A} = AP = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$2 = l_{21} \cdot 4 \Rightarrow l_{21} = \frac{1}{2}$

$2 = \frac{1}{2} + r_{22} \Rightarrow r_{22} = \frac{3}{2}$

$1 = 1 + 1 \cdot r_{23} \Rightarrow r_{23} = 0$

$1 = l_{31} \cdot 4 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{4}$

$1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} l_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

$2 = \frac{1}{2} + r_{33} \Rightarrow r_{33} = \frac{3}{2}$

c) (3 Punkte)

Ax=b

$P^2 = I_3 \Rightarrow \quad AP^2 x = b$

also $\quad \tilde{A}Px = b \qquad$ y:=Px

$\tilde{A}y = b$

LRy=b ~>

(1) löse Lz=b (z=Ry)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow z_1 = 0$

$\frac{1}{2} z_1 + z_2 = -3 \Rightarrow z_2 = -3$

$\frac{1}{4} z_1 + \frac{1}{2} z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_3 = -\frac{1}{2}(-3) = \frac{3}{2}$

(2) löse Ry=z

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_3 = 1$

$y_2 = \frac{2}{3} \cdot (-3) = -2$

$4y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}(2 - 2) = 0$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y=Px

$\Rightarrow Py = P^2 x = x$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5

Aufgabe 3

a) (2 Punkte)

Gaußsche Normalengleichung $A^TAx = A^Tb$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = (A^TA)^{-1}A^Tb = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es ist:

$$\min_{x\in R^2} ||b - Ax||^2 = ||\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}||_2^2$$

$$= ||\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}||_2^2 = ||\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}||_2^2 = 6$$

b) (2 Punkte)

(i)Lösung mit QR-Zerlegung:

Man berechnet die QR-Zerlegung von A:

$||b - Ax||_2^2 = ||b - QRx||_2^2 = ||Q(Q^Tb - Rx)||_2^2 = ||Q^Tb - Rx||_2^2$

R hat die Form $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$

und $Q^Tb = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \hline * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \hline c_2 \end{pmatrix}$ x ist nun die Lösung von $R_1 = c_1$

$c_2 = \min_{x\in R^2} ||b - Ax||_2^2$

(ii) Lösung mit Singulärzerlegung

Man bestimmt die Singulärzerlegung von A, A=$U\Sigma V^T$

setze $\Sigma^{-1} := diag(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_p^{-1}, 0, \dots, 0)$

dann ist $\tilde{x} = V\Sigma^{-1}U^Tb$ und

$\min_{x\in R^2} ||b - Ax||_2^2 =$

$||b - U\Sigma V^TV\Sigma^{-1}U^Tb||_2^2 = ||b - U\Sigma\Sigma^{-1}U^Tb||_2^2$

Aufgabe 2

a) (2 Punkte)

$$\Omega_{12} \; mit \; \Omega_{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \alpha = \pm\sqrt{3^2+4^2} = \pm 5, \; hier \; \alpha = 5$$

$$\Rightarrow \Omega_{12} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \Omega_{12}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{23} \; mit \; \Omega_{23}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}, \; \alpha = \pm\sqrt{1+3} = \pm 2, \; hier \; \alpha = 2$$

$$\Omega_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \Omega_{23}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$R = \Omega_{23}\tilde{A} = \underbrace{\Omega_{23}\Omega_{12}}_{=Q^T}A$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4\sqrt{3}}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4\sqrt{3}}{10} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) (2 Punkte)

Es ist $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i((QR)^*(QR))}$

$= \sqrt{\lambda_i(R^*Q^*QR)} = \sqrt{\lambda_i(R^*R)}$, *(Beachte, es ist $Q^*Q = I$)*

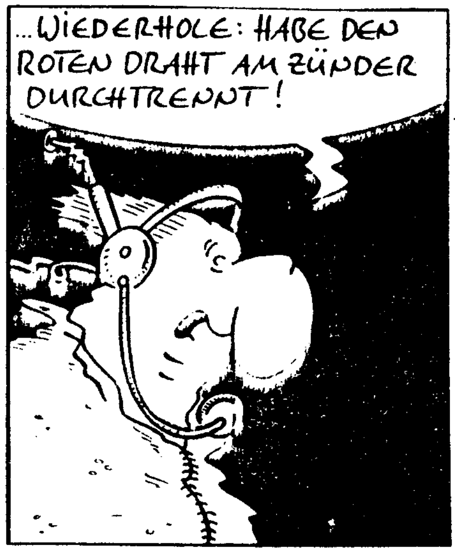
$$R^*R = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$0 \overset{!}{=} (25-\lambda)(8-\lambda) - 100 = \lambda^2 - 33\lambda + 100$$

$$\Rightarrow \lambda_{\frac{1}{2}} = \frac{33}{2} \pm \sqrt{\frac{33^2}{4} - 100} = \frac{33}{2} \pm \sqrt{\frac{1089-400}{4}} = \frac{33}{2} \pm \sqrt{\frac{689}{4}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{33}{2} \pm \sqrt{\frac{689}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 4



a) (2 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D + L + U$$

$$T_G = -D^{-1}(L+U)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|T_Q - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = -(\lambda^3 - \tfrac{3}{4}\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \tfrac{3}{4})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \lambda_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\rho(T_G) = |\tfrac{1}{2}\sqrt{3}| = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ Das Gesamtschrittverfahren konvergiert.

A ist symmertrisch

$|2| = 2 > 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 2 = 1 > 0$$

$\Rightarrow$(Hurwitz) A ist positiv definit

$\Rightarrow$das G-Verfahren konvergiert.

b) (2 Punkte)

$$T_E = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$x_{0,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{1,\alpha}^{(1)} = \tfrac{1}{2}(3-1) = 1$$

$$x_{1,\alpha}^{(2)} = 1(3-1) = 2$$

$$x_{1,\alpha}^{(3)} = \tfrac{1}{2}(1+1) = 1 \qquad \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b - Ax_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$T_E x_{0,\alpha} + c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

a) (2 Punkte)

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16 - 9 = \lambda^2 - 25 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_{\frac{1}{2}} = \pm 5$ sind die Eigenwerte von A

QR-Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \text{QR} \quad ; \alpha = \pm\sqrt{4^2 + 3^2} = \pm 5, \text{ hier } \alpha{=}5$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = R$$

In der Diagonalen von R stehen die exakten Eigenwerte von A $\Rightarrow$ I

b) (2 Punkte)

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha_1 = 4$$

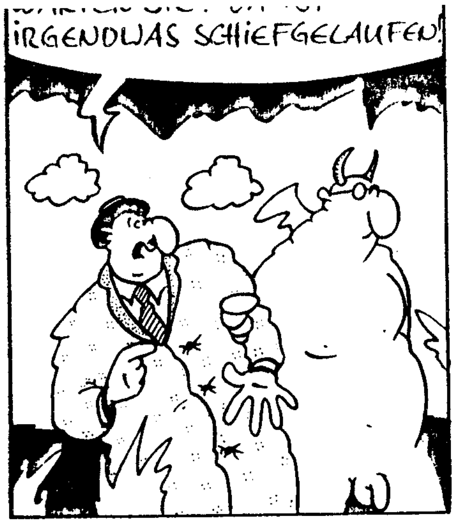
$$\Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$V_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 4 + \frac{9}{4} \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_0$$

Es ist also $\alpha_{2n+1} = 4,\ \alpha_{2n} = \frac{25}{4} \quad n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$Beh.



DAS WAR FRÜHJAHR 97

Aufgabe 6

a) (3 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = x_0^T A x_0 = (0 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$W_1 = Ax_0 - \alpha_0 x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 \|w_1\|_2 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{w_1}{\beta_1} = w_1$$

$$\alpha_1 = x_1^T A x_1 = (-1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$w_2 = Ax_1 - \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = 1, \ x_2 = w_2 \quad \Rightarrow V_3(x_0) = [-e_2, \ -e_1, \ -e_3]$$

$$(\ \alpha_2 = x_2^T A x_2 = (0 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1)$$

b) (2 Punkte)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

a) (2 Punkte)

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{cccccc}
-1 & 2 & & & & \\
 & & \rangle \ -1 & & & \\
0 & 1 & & \rangle \ \frac{1}{4} & & \\
 & & \rangle \ -\frac{1}{2} & & \rangle \ -\frac{1}{24} & \\
1 & \frac{1}{2} & & \rangle \ \frac{1}{8} & & \\
 & & \rangle \ -\frac{1}{4} & & & \\
2 & \frac{1}{4} & & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p_2(x) = 2 - (x+1) + \tfrac{1}{4}x(x+1)$$
$$p_3(x) = p_2(x) - \tfrac{1}{24}x(x+1)(x-1)$$

b) (2 Punkte)

Es ist $|f(x) - p_2(x)| \le \frac{1}{3!}|w_2(x) \cdot f'''(\xi)|$

$w_2(x) = x(x^2 - 1)$

$w_2'(x) = 3x^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \ x_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow |w_2(x)| \le \left|\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$f(x) = 2^{-x} = e^{-x \ln 2}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = -\ln 2 e^{-x \ln 2}$

$f''(x) = (\ln 2)^2 e^{-x \ln 2}$

$f'''(x) = (\ln 2)^3 e^{-x \ln 2} = (\ln 2)^3 (-1) 2^{-x} < 0 \ \forall x$

$f^{IV}(x) = (\ln 2)^4 e^{-x \ln 2} > 0 \ \forall x$

$\Rightarrow$ in [-1, 1] ist $|f'''(x)| \le (\ln 2)^3 2^{+1} = 2(\ln 2)^3$

$$\Rightarrow \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \le \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9}\sqrt{3} \cdot 2(\ln 2)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{27}(\ln 2)^3$$