

Aufgabe 1:

Gesucht ist die Lösung x^* der Gleichung $x = \cos x$ im Intervall $I := [0,1]$.

- (a) Zeigen Sie, daß die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \cos x_k$ für alle $x_0 \in I$ konvergiert.
- (b) Zeigen Sie, daß auch die Iteration $x_{k+1} = \frac{3}{10}x_k + \frac{7}{10}\cos x_k$ für alle $x_0 \in I$ gegen x^* konvergiert. Welche der beiden Iterationen konvergiert schneller?
- (c) Formulieren Sie die Vorschrift des Newton-Verfahrens zur Berechnung von x^* .

Aufgabe 2:

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} =: X$$

- (a) Zeigen Sie, daß A für kein ε mit $|\varepsilon| > \sqrt{3}$ eine Cholesky-Zerlegung besitzt.
- (b) Zeigen Sie, daß A für alle $\varepsilon \in X$ eine LR-Zerlegung besitzt.

Aufgabe 3:

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, daß 10 und $2\sqrt{2}$ die Singulärwerte von A sind und daß USV^T die Singulärwertzerlegung von A ist.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Singulärwertzerlegung $\|A\|_2$ und $\|A\|_F$.

Aufgabe 4:

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von A .
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|b - Ax\|_2^2$$

und geben Sie den Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ an, für den das Minimum angenommen wird.

Aufgabe 5:Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, daß sowohl das Einzelschrittverfahren als auch das cg-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ konvergieren.
- (b) Führen Sie zwei Schritte des Verfahren des steilsten Abstiegs zur Lösung von $Ax = b$ durch, der Startvektor sei $x_0 = (\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{6}{5})^T$.

Aufgabe 6:

Gesucht seien die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Beschreiben Sie die Vorschrift des QR-Verfahrens. Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Berechnung der Eigenwerte von A durch.
- (b) Führen Sie mit dem Startvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zwei Schritte der Vektoriteration zur Berechnung der größten Eigenwerte von A durch. Bestimmen Sie den Fehler der Näherung.

Aufgabe 7:

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Lanczos-Algorithmus eine Orthonormalbasis des Krylov-Raumes

$$V_3(x_0) := \text{span}\{x_0, Ax_0, A^2x_0\}.$$

- (b) Transformieren Sie mit Hilfe von (a) die Matrix A auf Tridiagonalgestalt.

Aufgabe 8:Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

- (a) Geben Sie ein Polynom p_2 vom Grad 2 an, welches f an den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ interpoliert.
- (b) Zeigen Sie, daß

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

Aufgabe 1

a) (2P) Banachscher Fixpunktsatz $f(x) = \cos x = x$

- i) $I = [0,1]$ abgeschlossen
- ii) $0 < \cos 1 \leq \cos x \leq \cos 0 = 1 \quad \forall x \in I$, da \cos streng monoton fallend in $(0, \frac{\pi}{2}) \supseteq (0,1) \Rightarrow f(I) \subseteq I$
- iii) $|f'(x)| = |\sin x| \leq \sin 1 < \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \forall x \in I$, da \sin streng monoton wachsend in $(0, \frac{\pi}{2}) \supseteq (0,1) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \underbrace{\sin 1}_{=: L < 1} \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in I$



i) - iii) \xrightarrow{BFS} Beh.

b) (2P) wieder Banach $g(x) = \frac{3}{10}x + \frac{7}{10}\cos x$

- i) I abg.
- ii) Es ist $x \in [0,1] \Rightarrow \frac{3}{10}x \in [0, \frac{3}{10}]$, $\frac{7}{10}\cos x \in [0, \frac{7}{10}] \Rightarrow g(x) \in [0,1] \Rightarrow g(I) \subseteq I$
- iii) $g'(x) = \frac{3}{10} - \frac{7}{10}\sin x$
 $g''(x) = -\frac{7}{10}\cos x \leq 0 \quad \forall x \in I$
 $\Rightarrow g'$ fällt monoton
 $\Rightarrow \max |g'(x)| = \max\{|g'(0)|, |g'(1)|\} = \max\{\frac{3}{10}, \underbrace{|\frac{3}{10} - \frac{7}{10}\sin 1|}_{< 1, \text{ da } |\sin 1| < 1}\} =: \hat{L}$

i) - iii) \xrightarrow{BFS} Beh.

c) (1P) Umformulierung als Nullstellenproblem

ges. x^* mit $0 = \cos x^* - x^* =: h(x^*)$

Vorschrift:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\cos x_k - x_k}{-\sin x_k - 1} = x_k + \frac{\cos x_k - x_k}{\sin x_k + 1}$$



Aufgabe 2

a) (2P) Cholesky-Zerlegung ex. Für symmetrisch pos. def. Matrizen

A symmetrisch ✓

A pos. def. ?

$$\det(2) = 2 > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 2 \end{pmatrix} = 8 - 2\varepsilon^2 - 2 = 6 - 2\varepsilon^2 > 0$$

$$6 - 2\varepsilon^2 > 0 \Leftrightarrow 3 > \varepsilon^2 \Leftrightarrow |\varepsilon| < \sqrt{3}$$

\Rightarrow für $|\varepsilon| > \sqrt{3}$ ist A nicht pos. def. \Rightarrow Cholesky-Zerlegung existiert nicht

2. Weg

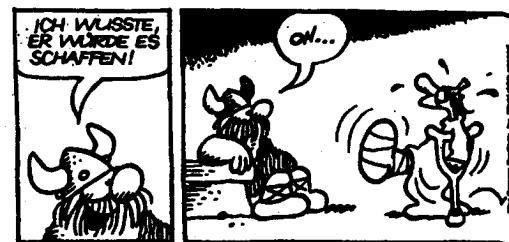
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

$$2 = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{2}$$

$$0 = l_{11}l_{21} = \sqrt{2}l_{21} \Rightarrow l_{21} = 0$$

$$\varepsilon = l_{11}l_{31} = \sqrt{2}l_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$2 = l_{21}^2 + l_{22}^2 = l_{22}^2 \Rightarrow l_{21} = \sqrt{2}$$



$$1 = l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = \sqrt{2} l_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2} + l_{33}^2 \Rightarrow l_{33}^2 = \frac{1}{2}(3 - \varepsilon^2) \Rightarrow l_{33} = \sqrt{\frac{1}{2}(3 - \varepsilon^2)}$$

für $|\varepsilon| > \sqrt{3}$ ist die Zahl unter der Wurzel negativ, das Verfahren bricht zusammen, die Cholesky-Zerlegung existiert nicht.

b) (2P)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

$$2 = r_{11}, \quad 0 = r_{12}, \quad \varepsilon = r_{13}$$

$$0 = l_{21}r_{11} = 2l_{21} \Rightarrow l_{21} = 0$$

$$2 = l_{21}r_{12} + r_{22} = r_{22}$$

$$1 = l_{21}r_{13} + r_{23} = r_{23}$$

$$\varepsilon = l_{31}r_{11} = 2l_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$1 = l_{31}r_{12} + l_{32}r_{22} = 2l_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{2}$$

$$2 = l_{31}r_{13} + l_{32}r_{23} + r_{33} = \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2} + r_{33} \Rightarrow r_{33} = \frac{3 - \varepsilon^2}{2} \neq 0 \quad \forall \varepsilon \in X$$

d.h. für $\varepsilon \in X$ existiert die LR-Zerlegung und es gilt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3 - \varepsilon^2}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) (2P) Es ist

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad USV^T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad UU^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\text{iii)} \quad VV^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\text{iv)} \quad AA^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 46 \\ 46 & 54 \end{pmatrix}$$

$$(54 - \lambda)^2 - 46^2 = 2916 - 108\lambda + \lambda^2 - 2116 = \lambda^2 - 108\lambda + 800 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 54 \pm \sqrt{2916 - 800} = 54 \pm 46$$

$$\lambda_1 = 100, \quad \lambda_2 = 8$$

$$\sigma_1 = \sqrt{100} = 10, \quad \sigma_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

i)-iv) \Rightarrow Beh.

$$\text{b)} \quad \|A\|_2 = \|USV^T\|_2 = \|S\|_2 = \sigma_1 = 10$$

$$\|A\|_F = \|USV^T\|_F = \|S\|_F = \sqrt{100 + 8} = \sqrt{108}$$



Aufgabe 4

a) (2P)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = QR$$

i) $Q_{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \pm\sqrt{3^2 + 4^2} = \pm 5, \quad \text{z.B. } \alpha = 5 \Rightarrow c = \frac{3}{5}, \quad s = \frac{4}{5}$$

$$Q_{13} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = Q_{13} A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

ii) $Q_{23} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{49}{25}} = \pm\sqrt{2}, \quad \text{z.B. } \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{1}{5\sqrt{2}}, \quad s = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$Q_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = Q_{23} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{5} \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: R$$

$$R = Q_{23} \tilde{A} = \underbrace{Q_{23} Q_{13}}_{=: Q^T} A$$

$$Q^T = Q_{23} Q_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{28}{25\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{21}{25\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{25\sqrt{5}} & -\frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{25\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{28}{25\sqrt{2}} & -\frac{4}{25\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{5\sqrt{2}} & -\frac{7}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5} & \frac{21}{25\sqrt{2}} & \frac{3}{25\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

b) (2P)

$$\|b - Ax\|_2^2 = \|b - QRx\|_2^2 = \|Q^T(b - QRx)\|_2^2 = \|Q^T b - Rx\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Rx \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$$= \|b_1 - Rx\|_2^2 + \|b_2\|_2^2$$

$$Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{28}{25\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{21}{25\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{25\sqrt{5}} & -\frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{25\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = -7$$

i) löse $b_1 - Rx = 0 \Leftrightarrow b_1 = Rx$



$$\begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{5} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{25\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ii) $\|b_2\|_2^2 = 49$

Das heißt: das Minimum 49 wird für $x = \frac{1}{25\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 25 \end{pmatrix}$ angenommen

Aufgabe 5

a) (2p)

$$T = -(D+L)^{-1}U$$

$$D+L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow T = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\det(T - \lambda I_3) = -\lambda \left(\left(\frac{1}{4} - \lambda \right) \left(\frac{1}{8} - \lambda \right) - \frac{1}{32} \right) = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{3}{8}\lambda \right) = -\lambda^2 \left(\lambda - \frac{3}{8} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = 0, \quad \lambda_3 = \frac{3}{8} \quad \rho(T) = \frac{3}{8} < 1 \Rightarrow \text{ESV konvergiert}$$

A symmetrisch

$$|2| = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \quad \det(A) = 16 - 2 - 4 = 10 > 0$$

Hurwig-Kriterium \Rightarrow A pos. def.

A s.p.d. \Rightarrow cg-Verfahren konvergiert

b) (2P) Verfahren des steilsten Abstiegs

$$r_k = b - Ax_k$$

$$w_k = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k}$$

$$x_{k+1} = x_k + w_k r_k$$

$$x_0 = b - Ax_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_0 = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

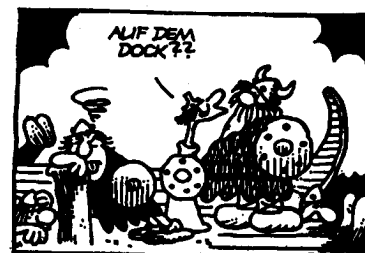
$$x_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}$$



NA LIND?! JEDE NEUE MANN-SCHAFT WIRD SEEKRANK!



$$x_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

a) (2P) gegeben: $A_1 := A$

für $R=1,2,\dots$ berechne die QR-Zerlegung $A_k = Q_k R_k$

setze $A_{k+1} = R_k Q_k$

dann gilt $Q_k \rightarrow I$

$R_k \rightarrow \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = QR$$

$$\alpha = \pm \sqrt{25+16}, \quad \text{z.B. } \alpha = \sqrt{41}$$

$$c = \frac{5}{\sqrt{41}}, \quad s = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\Rightarrow Q^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{41}} & \frac{4}{\sqrt{41}} \\ -\frac{4}{\sqrt{41}} & \frac{5}{\sqrt{41}} \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{41}} & \frac{4}{\sqrt{41}} \\ -\frac{4}{\sqrt{41}} & \frac{5}{\sqrt{41}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{41} & \frac{40}{\sqrt{41}} \\ 0 & \frac{9}{\sqrt{41}} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{41}$ und $\frac{9}{\sqrt{41}}$ sind die Näherungen an die Eigenwerte

b) (2P)

i) $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$u_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \tau_1 = 5$$

$$x_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = Ax_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 41 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \frac{41}{5}$$

ii) Bestimmung der exakten EWe:

$$|A - \lambda I_2| = (5 - \lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9$$

$$\lambda_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25-9} = 5 \pm 4 \Rightarrow \lambda_{\max} = 9$$

$$|\lambda_{\max} - \tau_1| = 4$$

$$|\lambda_{\max} - \tau_2| = \frac{4}{5}$$

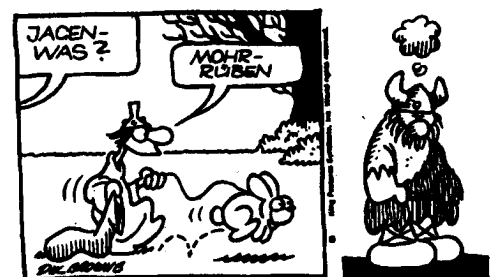
Aufgabe 7

a) (2P)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = x_0^T A x_0 = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$w_1 = Ax_0 - \alpha_0 x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\beta_1 = \|w_1\|_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{w_1}{\beta_1} = w_1$$

$$a_1 = x_1^T A x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$w_2 = A x_1 - \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = w_2$$

$$\Rightarrow ONB = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) (2P) Es ist $\tilde{A} = V^T A V$ mit $V = \{x_0 \mid x_1 \mid x_2\}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

oder

$$\alpha_2 = x_2^T A x_2 = 2$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

a) (2P) Lagrange-Grundpolynome

$$L_0(x) = \prod_{i=1}^2 \frac{x-x_i}{x_0-x_i} = \frac{x}{-1} \cdot \frac{x-1}{-2} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

$$L_1(x) = \frac{x+1}{1} \cdot \frac{x-1}{-1} = -(x^2 - 1)$$

$$L_2(x) = \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x}{1} = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+2} = 1, \quad f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1 \cdot L_0(x) + \frac{1}{2} L_1(x) + \frac{1}{3} L_2(x)$$

b) (2P) Es ist

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!} |w_2(x) \cdot f'''(\xi)|$$

$$w_2(x) = (x+1)x(x-1) = x^3 - x$$

$$w_2(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$w_2 \text{ punktsymmetrisch} \Rightarrow \text{in } [-1,1] \text{ ist } |w_2(x)| \leq |w_2(\sqrt{\frac{1}{3}})| = \left| \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right| = \frac{2}{9} \sqrt{9}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} \quad f'''(x) = -\frac{6}{(x+2)^4}$$

$$|f'''(x)| \leq 6 \text{ in } [-1,1]$$

$$\Rightarrow |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{9} \sqrt{3} \cdot 6 = \frac{2}{9} \sqrt{3} \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{2}{9} \sqrt{3}$$



und
Tschüß...

Zum Bestehen der Klausur waren 14 Punkte nötig