

# **Lineare Algebra und Analytische Geometrie I**

**Sätze und Definitionen**

**aus dem Skript von Kunle/Aumann/Schober - Uni KA**

# I Grundbegriffe

## 1 Mengen

### 1.1 Über den Mengenbegriff

### 1.2 Mengenoperationen

S1:  $M_1 = M_2$  genau dann, wenn  $M_1 \subset M_2$  und  $M_2 \subset M_1$

## 2. Abbildungen und Relationen

### 2.1 Abbildungen

Def1: geg: zwei Mengen A und B, jedem Element von A ist genau ein Element von B zugeordnet: **Abbildung von A in B**; geschrieben:

$$f: A \rightarrow B; a \mapsto f(a) \quad \text{oder auch} \quad f: \begin{cases} A \rightarrow B \\ a \mapsto f(a) \end{cases}$$

A: Definitionsmenge, B: Zielmenge,  $f(A) = \text{Bild } f$ : Bild oder Wertemenge  
 $\{a, f(a) \mid a \in A\}$ : Graph der Abb.  $f$

Def2: **surjektiv**:  $f(A) = B$

Def3: **injektiv**:  $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Def4: **bijektiv**: surjektiv und injektiv

**Permutation**: bijektive Selbstabbildung

Def5: zwei Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  und  $f': A' \rightarrow B'$  heißen **gleich**, wenn  $A=A'$  und  $B=B'$  und  $f(x)=f'(x)$  für jedes  $x \in A$

Def6:  $g$  heißt **Restriktion** von  $f$  auf  $A'$  (Schreibw.:  $g = f|_{A'}$ ): Abb.  $f: A \rightarrow B$  und  $g: A' \rightarrow B$  mit  $A' \subset A$   
( $f$  ist die Fortsetzung von  $g$  auf  $A$ )

Def7: **Verkettung**: Abbildung  $h: \begin{cases} A \rightarrow D \\ x \mapsto h(x) := g(f(x)) \end{cases}$  ( $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D; f(A) \subset C$ )  
Schreibweise:  $h = g \circ f$  ( $g$  nach  $f$ )

Def8: **Verknüpfung**:  $f: \begin{cases} A \times A \rightarrow A \\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x * y \end{cases}$   
 Menge A mit Verknüpfung: *Verknüpfungsgebilde*  $(A, *)$  (statt \* auch oft +, -, · usw.)  
 innere Verknüpfung (wie oben)  
 äußere Verknüpfung:  $f: S \times A \rightarrow A$  (S: bel. Menge [Skalarbereich])

## 2.2 Relationen

Def: **Relation**: Teilmenge  $R \subset A \times B$  des karth. Produkts  
 geschrieben: statt  $(x, y) \in R$ :  $xRy$

## 2.3 Ordnungsrelationen

Def1: **Ordnungsrelation** (= Halbordnung = partielle O.): reflexiv, antisymmetrisch, transitiv  
 Bsp.:  $\leq$  ist Ordnungsrelation in und  $(A, \leq)$  ist (partiell) geordnete Menge

Def2: **Totalordnung** (=lin. Ordnung): alternative Halbordnung (Vergleichbarkeit)

**strenge (Halb-)Ordnung**: irreflexiv, transitiv

Def3:  $(A, \leq)$  eine geordnete Menge;  $g \in A$  heißt **größtes Element** von A, wenn  $x \leq g \quad \forall x \in A$

Def4: es sei  $U \subset A$ ;  $s \in A$  heißt **obere Schranke** von U, wenn  $u \leq s \quad \forall u \in U$   
 (muß nicht in U liegen!)

Def5: hat die Menge S der oberen Schranken von U ein kleinstes Element  $s_0$ , so heißt  $s_0$   
**obere Grenze** oder **Supremum** von U

**Auswahlfunktion**: wählt in einer Menge von Mengen aus jeder Menge ein Element aus

S1: es sei  $f: A \rightarrow B$  ( $A, B \neq \emptyset$ ) eine surjektive Abbildung, dann gibt es eine  
 „Rechtsinverse“  $g: B \rightarrow A$ ,  $f \circ g = \text{id}_B$

Def6:  $a \in A$  heißt **maximales Element** der geordneten Menge  $(A, \leq)$ , wenn es kein  $x \in A$   
 gibt mit  $a \leq x$  und  $a \neq x$ .  
 eine Teilmenge  $K \subset A$  heißt **Kette** in  $(A, \leq)$ , wenn K bezüglich  $\leq$  total geordnet ist.  
 analog: *minimale Elemente* (später)  
Achtung: maximales Element ist nicht das größte Element!

S2: **ZORNsches Lemma**: es sei  $(A, \leq)$  eine geordnete Menge,  $A \neq \emptyset$ . Ferner besitzt jede  
 Kette in  $(A, \leq)$  eine obere Schranke. Dann hat A ein maximales Element

## 2.4 Äquivalenzrelationen

Def1: **Äquivalenzrelation**: reflexiv, symmetrisch, transitiv

wenn  $\sim$  eine Äquivalenzrelation:  $K_a = \{x \in A \mid x \sim a\}$  ist (Äquivalenz-)Klasse

Def2: ist in einer Menge  $A$  ein System von Teilmengen („Klassen“) gegeben für die gelten:

1. keine Klasse ist leer
2. der Durchschnitt von je zwei versch. Klassen ist leer
3. die Vereinigung aller Klassen ist  $A$

so spricht man von einer **Klasseneinteilung** in  $A$

Menge der Klassen einer Klasseneinteilung = **Faktormenge**  $\tilde{A}$  von  $A$  bezgl.  $\sim$

zugehörige **natürliche** (oder **kanonische**) **Abbildung**:  $v: \begin{cases} A \rightarrow \tilde{A} \\ a \mapsto v(a) = K_a = \tilde{a} \end{cases}$

(ordnet jedem  $a \in A$  seine Klasse  $K_a = \tilde{a} \in \tilde{A}$  zu)

**Restklasse mod  $k$** :  $\tilde{a}$ , bestehend aus allen  $x \in \mathbb{Z}$ , die bei division durch  $k$  den Rest  $r$  lassen

( $r$  ist **Repräsentant**)

$\mathbb{Z}_k = \{ \tilde{0}, \tilde{1}, \dots, \overline{k-1} \}$  (Faktormenge  $\mathbb{Z}_{\sim}$ )

## 3. Gruppen, Ringe, Körper

### 3.1 Verknüpfungsgebilde

Verknüpfungsgebilde  $(A, H)$  können *assoziativ* und/oder *kommutativ* sein

$\bar{a}$  ist **inverses Element** von  $a$ , wenn:  $\bar{a} H a = n = a H \bar{a}$

Beweis „es gibt nur *ein* Inverses“: S.22

Def1: Eine Abbildung  $h: A \rightarrow B$  mit der Eigenschaft (h) heißt **Homomorphismus** von  $(A, H)$  in  $(B, \cdot)$ . Ist  $h$  außerdem bijektiv, so heißt  $h$  **Isomorphismus**.

für  $A = B$  ist der Homomorphismus ein **Endomorphismus** und der Isomorphismus ein **Automorphismus**.

### 3.2 Gruppen

Def1: Eine **Gruppe** ist ein Verknüpfungsgebilde  $(A, H)$  mit folgenden Eigenschaften:  
*assoziativ, neutrales Element, Inverses*  
**abelsche Gruppe**: zusätzlich gilt *Kommutativgesetz*

Bem1: Inverses und neutrales Element sind *eindeutig*

S1: In einer Gruppe  $(A, H)$  sind die Gleichungen  $a H x = b$  und  $x H c = d$  eindeutig lösbar (Lösung für  $a H x = b$ :  $x = \bar{a} H b$ )

$(S_M, \circ)$  ist eine Gruppe (Aufg.!) wobei  $S_m$  die Menge der bijektiven Selbstabbildungen von  $M$  ist, man nennt sie **symmetrische Gruppe**.

Bem: Es gibt  $m!$  viele Permutationen der Menge  $\{1, 2, \dots, m\}$

Notation der Permutationen:  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \end{pmatrix}$

**Transposition:** Permutation aus  $S_m$ , bei der nur zwei bestimmte Zahlen  $i$  und  $k$  vertauscht werden – Notation:  $(i k)$

S2: Jede Permutation  $\pi \in S_m$  ( $m \geq 2$ ) läßt sich als Verkettung von Transpositionen darstellen.  
(Beweis durch vollständige Induktion)

Die Darstellung einer Permutation  $\pi$  durch Transpositionen ist aber nicht eindeutig bestimmt. (es kann mehrere Möglichkeiten geben, eine Permutation durch Transpositionen darzustellen) es gilt jedoch:

S3: Die Anzahl der Transpositionen in *allen* Darstellungen von  $\pi \in S_m$  ( $m \geq 2$ ) ist entweder *stets gerade* oder *stets ungerade*. (*gerade bzw. ungerade Permutation*)

**Fehlstände:** Fälle, wo  $\pi(i) > \pi(k)$  für  $i < k$  ist. (S.26)

wenn Fehlstandszahl gerade: gerade Permutation; wenn ungerade: ungerade Permutation.

**alternierende Gruppe:** Gruppe  $(A_m, \circ)$ , die von den geraden Permutationen von  $S_m$  ( $m \geq 2$ ) bezüglich  $\circ$  gebildet wird (S. 27)

Bem: Die Teilmenge  $B_m$  der ungeraden Permutationen von  $S_m$  ist bzgl.  $\circ$  *keine* Gruppe, da  $\circ$  keine Verknüpfung in  $B_m$  ist.

**Anzahl der geraden und ungeraden Permutationen** von  $S_m$  ( $m \geq 2$ ): jeweils  $\frac{1}{2}m!$ , da die Abbildung  $|\cdot|: A_m \rightarrow B_m: \pi_g \mapsto \pi_u = (1 2) \circ \pi_g$  bijektiv ist,  $A_m$  und  $B_m$  sind gleichmächtig.

Def2: Gegeben sei eine Gruppe  $(A, H)$  und eine Teilmenge  $U \subset A$ , die bzgl. der von  $A$  induzierten Verknüpfung  $H$  eine Gruppe ist.  
Dann heißt  $(U, H)$  **Untergruppe** von  $(A, H)$

Bem: Das neutrale Element der Untergruppe stimmt mit dem der Gruppe überein (da eindeutig!)

S4: **Untergruppenkriterien:** eine Teilmenge  $U \subset A$  ist Untergruppe der Gruppe  $(A, H)$  bzgl.  $H$ , wenn gilt:

1.  $U \neq \emptyset$

$$2. \quad \forall a, b \in U : a H \bar{b} \in U$$

Bem: das homomorphe Bild einer Gruppe ist wieder eine Gruppe.

### 3.3 Ringe

Def1: ein Ring ist ein Verknüpfungsgebilde  $(R, +, \cdot)$  mit zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  und mit folgenden Eigenschaften:

1.  $(R, +)$  ist abelsche Gruppe
2.  $(R, \cdot)$  ist assoziativ
3. die Distributivgesetze gelten

wenn der Ring kommutativ (d.h.  $(R, \cdot)$  ist kommutativ), so folgt das zweite Distributivgesetz aus dem ersten [eins reicht dann]

neutrales Element in  $(R, +)$ : Nullelement

zu  $a$  inverses Element:  $-a$

neutrales Element bzgl.  $\cdot$ : Einselement

Def2: ein Element  $a \neq 0$  eines Ringes  $R$  heißt *linker Nullteiler*, wenn es ein  $b \in R, b \neq 0$  gibt mit  $ab = 0$ . Analog ist ein *rechter Nullteiler* definiert.  
(z. B. in einem Restklassenring)

### 3.4 Körper

Def1: Ein Ring  $(R, +, \cdot)$ , für den  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  eine abelsche Gruppe ist, heißt *Körper*.

Bem: ein Ring mit Nullteilern ist *kein* Körper

Def2: Ist  $(K, +, \cdot)$  ein Körper und gibt es eine natürliche Zahl  $m$ , so daß  $\underbrace{1+1+\dots+1}_m = 0$ ,  
so heißt die kleinste solche Zahl  $p$  die *Charakteristik* (char  $K$ ) von  $K$ . Gibt es ein solches  $m$  nicht, so ordnet man  $K$  die Charakteristik 0 zu.

Bem: Ist die Charakteristik  $p \neq 0$ , so ist die  $p$ -fache Summe  $a+a+a+\dots+a = 0$  für alle  $a \in K$  und  $p$  ist eine Primzahl. (S.30)

Bem: es gibt zu jeder Primzahl  $p$  und jeder natürlichen Zahl  $k$  einen Körper  $K$  mit  $p^k$  Elementen und  $\text{char } K = p$ ; man bezeichnet ihn mit  $GF(p^k)$  [GF = Galois-Feld] umgekehrt ist jeder Körper zu so einem  $GF(p^k)$  isomorph.

*Monotoniegesetze*:  $\forall a, b, c \in K$  gilt:

$$(m_a) \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$(m_m) \quad a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$$

Def3: Ein Körper  $(K, +, \cdot)$ , der bzgl.  $\leq$  totalgeordnet ist und für den die Monotoniegesetze  $(m_a)$  und  $(m_m)$  gelten, heißt *angeordneter Körper*.

## Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  Menge aller geordneten Paare  $(\alpha, \beta)$  reeller Zahlen.

**Addition:**  $(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$

**Multiplikation:**  $(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta', \alpha\beta' + \alpha'\beta)$

**Einsselement:**  $(1, 0)$

**multiplikative Inverse** von  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ :  $\left( \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$

**Schreibweise:**  $z = \alpha + i\beta$

**konjugiert komplexe Zahl** (zu  $z = \alpha + i\beta$ ):  $\bar{z} = (\alpha, -\beta) = \alpha - i\beta$

(Absolut-) **Betrag** von  $z$ :  $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Addition und Multiplikation in neuer Schreibweise:

$$z_1 + z_2 = \alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2)$$

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$$

Bem: wie gewohnt:  $i^2 = -1$

## II Vektorräume

### 4. Definition und Beispiele von Vektorräumen

#### 4.1 Vektoren im Anschauungsraum

Menge  $V$  der Vektoren bildet mit  $+$  ein Verknüpfungsgebilde  $(V, +)$ ,  $(V, +)$  ist eine *abelsche Gruppe*

**S-Multiplikation:**  $\alpha a$ ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $a \in V$ ;  $\alpha a = o$  falls  $a = o \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$   
( $o$  ist der Nullvektor)

Satz: Die Mittelpunkte  $P, Q, R, S$  der Seiten eines (räumlichen) Vierecks  $ABCD$  bilden ein Parallelogramm

**Parameterdarstellung einer Geraden:**  $x = a + \xi v$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$

**Parameterdarstellung einer Ebene:**  $x = a + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2$

**Parameterdarstellung des Anschauungsraumes:**  $x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3$

#### 4.2 Definition des Vektorraums, Beispiele

Def1: Es seien  $V$  eine Menge und  $S$  ein Körper. Gegeben sei eine innere Verknüpfung („Addition“)  $V \times V \rightarrow V$  mit  $(a, b) \mapsto a + b$ , so daß  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe ist. Gegeben sei weiter eine Verknüpfung („S-Multiplikation“)  $S \times V \rightarrow V$  mit  $(\alpha, a) \mapsto \alpha a$ , so daß für alle  $\alpha, \beta \in S$  gilt

$$(m1) \quad 1a = a$$

$$(m2) \quad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$$

$$(m3) \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$$

$$(m4) \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$$

Dann heißt  $V$  ein **S-Vektorraum**. Die Elemente von  $V$  heißen **Vektoren**, die von  $S$  **Skalare**.

(Vektorraum = linearer Raum)

$\mathbb{R}^n$  mit entspr. Addition und S-Multiplikation: **Standard-Vektorraum über  $\mathbb{R}$**  (S. 40/41)

**Vektorraum Polynome über  $\mathbb{R}$** : (S. 41)

wenn zusätzlich ein Produkt  $a \bullet b$  eingeführt wird: **Polynomring  $\mathbb{R}[x]$**  (vergl. 41)

**Verträglichkeitsbedingung (v):**  $(\lambda \cdot a) \bullet b = a \bullet (\lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a \bullet b)$

Def2: Es seien  $A$  eine Meng und  $S$  ein Körper. Ferner seien auf  $A$  zwei innere Verknüpfungen  $+, \bullet: A \times A \rightarrow A$  und eine äußere Verknüpfung  $\cdot: S \times A \rightarrow A$  so erklärt, daß  $(A, +, \cdot)$  ein S-Vektorraum,  $(A, +, \bullet)$  ein Ring mit Einselement ist und die

Verträglichkeitsbedingung (v) für alle  $\lambda \in S$  und  $a, b \in A$  gilt. Dann heißt  $(A, +, \cdot, \bullet)$  eine *S-Algebra*.

### 4.3 Erste Eigenschaften von Vektorräumen

S1: In einem S-Vektorraum V gilt für alle  $\alpha \in S$  und alle  $a \in V$ :

$$\alpha a = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee a = 0$$

S2: In einem S-Vektorraum V gilt für alle  $\alpha \in S$  und alle  $a \in V$ :

$$(-\alpha)a = -(\alpha a)$$

### 4.4 Der Vektorraum der (p, n)-Matrizen

*Summe* von Matrizen: einzelne Elemente paarweise addieren.

S1: Die Menge  $S^{(p,n)}$  aller (p, n)-Matrizen über S ist bzgl. der Summe und der S-Multiplikation ein S-Vektorraum

*Matrizenmultiplikation*: „Zeilen mal Spalten“

zu quadratischen Matrizen:

S1: Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und S ein Körper. Bezeichnet  $+, \cdot, \bullet$  der Reihe nach die Addition, die S-Multiplikation bzw. die Multiplikation von Matrizen, so ist  $(S(n,n), +, \cdot, \bullet)$  eine *S-Algebra*.

allgem. gelten: Assoziativgesetz, Distributivgesetz und

$$\text{Verträglichkeitsgesetz: } (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$$

(gelten auch für nichtquadratische Matrizen, falls sich die jeweils auftretenden Operationen  $+, \cdot, \bullet$  überhaupt bilden lassen.)

Rechenregeln für transponierte Matrizen:

für alle  $A, B \in S^{(p,n)}, \lambda \in S$  gilt:  $(A + B)^T = A^T + B^T; (\lambda A)^T = \lambda A^T; A^{TT} = A$

und für alle  $A \in S^{(p,n)}, B \in S^{(n,q)}$  gilt:  $(AB)^T = B^T A^T$

## 5 Untervektorräume

### 5.1 Definition

Def1: Eine Teilmenge  $U$  eines  $S$ -Vektorraums  $V$  heißt **Untervektorraum** (UVR) von  $V$ , wenn  $U$  bzgl. der in  $V$  erklärten Addition und  $S$ -Multiplikation ein  $S$ -Vektorraum ist.

(Inverse und Nullvektoren sind die gleichen)

S1: **UVR-Kriterium:**  $U$  ist Untervektorraum von  $V$ , wenn (U1) und (U2) erfüllt sind:

$$(U1) \quad U \neq \emptyset$$

$$(U2) \quad \forall a, b \in U \quad \forall \lambda \in S: \quad a + b \in U \quad \wedge \quad \lambda a \in U$$

(Abgeschlossenheit!!)

Def2: **Linearkombination** (s. S. 52)

### 5.2 Lineare Hülle

Def1: Die **lineare Hülle** oder **Spann**  $[a_1, \dots, a_p]$  der Vektoren  $a_1, \dots, a_p$  eines VR  $V$  ist die Menge aller Vektoren von  $V$ , die sich als Linearkombination der  $a_1, \dots, a_p$  darstellen lassen.

Def2: Die lineare Hülle  $[M]$  einer nichtleeren Teilmenge  $M$  eines VR  $V$  ist die Menge aller Vektoren von  $V$ , die sich als Linearkombination von Vektoren aus  $M$  darstellen lassen. Für  $M = \emptyset$  setzen wir  $[M] = \{0\}$ .

S1: Für jede Teilmenge  $M$  eines Vektorraums  $V$  ist die lineare Hülle  $[M]$  ein UVR von  $V$ .

Def3: Gegeben sei ein UVR  $U$  eines VR  $V$ . Eine Menge  $M \subset U$  mit  $[M] = U$  heißt **erzeugende Menge von  $U$** . Eine **erzeugende** Menge  $M$  von  $U$  heißt minimal, wenn es keine echte Teilmenge  $M'$  von  $M$  gibt, für die  $[M'] = U$ .

### 5.3 Durchschnitt und Summe von Untervektorräumen

S1: Es sei  $\mathcal{U}$  eine nichtleere (endliche oder unendliche) Menge von Untervektorräumen eines VR  $V$ . Dann ist der Durchschnitt  $D = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$  ein Untervektorraum von  $V$ .

S2: Es sei  $\mathcal{U}$  die Menge aller UVR eines VR  $V$ , die eine gegebene Menge  $M \subset V$  enthalten. Dann gilt  $[M] = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

Def1: Unter der **Summe der UVR**  $U_1, U_2$  des VR  $V$  verstehen wir den UVR  $U_1 + U_2 = [U_1 \cup U_2]$

S3: Die Summe  $U_1 + U_2$  der UVR  $U_1, U_2$  des VR  $V$  ist die Menge aller Vektoren  $w = u_1 + u_2$  mit  $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$

Def2: Die Summe  $U_1+U_2$  zweier UVRe  $U_1, U_2$  eines VR  $V$  heißt **direkte Summe**  $U_1\oplus U_2$ , wenn  $U_1\cap U_2 = \{0\}$

S4: Die Summe  $U_1+U_2$  zweier UVRe  $U_1, U_2$  eines VR  $V$  ist genau dann **direkt**, wenn es zu jedem  $w \in U_1+U_2$  genau einen Vektor  $u_1 \in U_1$  und genau einen Vektor  $u_2 \in U_2$  gibt mit  $w = u_1+u_2$ .

Bem1+2: analog bei mehr als zwei Untervektorräumen – auch unendlich viele.

## 5.4 Lineare Abhängigkeit

Def1: Die  $p$  Vektoren  $a_1, \dots, a_p$  eines  $S$ -Vektorraumes  $V$  heißen **linear abhängig**, wenn es eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors als Linearkombination der  $a_1, \dots, a_p$  gibt. Die Vektoren  $a_1, \dots, a_p$  sind also genau dann linear abhängig, wenn es  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in S$  gibt, die nicht alle Null sind, so daß  $\sum_{i=1}^p \alpha_i a_i = 0$ .

anlog: **linear unabhängig**: wenn Summe 0 ist, dann zwingend  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$

S1: Die  $p$  Vektoren  $a_1, \dots, a_p$  ( $p>1$ ) eines Vektorraumes  $V$  sind genau dann lin. abhängig, wenn es einen Vektor gibt, der sich als Linearkombination der übrigen darstellen läßt.

S2: Sind  $a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_q$  ( $q>p$ ) Vektoren eines VR  $V$  und sind  $a_1, \dots, a_p$  lin. abh., dann sind auch  $a_1, \dots, a_q$  linear abhängig.

S3: Sind  $a_1, \dots, a_p$  linear unabhängige Vektoren eines Vektorraums  $V$ , dann sind auch  $a_1, \dots, a_r$  linear unabhängig für jedes  $r \in \{1, \dots, p\}$

S4:  $p+1$  Linearkombinationen von  $p$  Vektoren eines Vektorraums  $V$  sind stets linear abhängig.

Def2: Eine nichtleere Teilmenge  $M$  eines Vektorraums  $V$  heißt **linear abhängig**, wenn es (mindestens) eine endliche Teilmenge von  $M$  gibt, deren Vektoren linear abhängig sind.  $M$  heißt **linear unabhängig**, wenn die Vektoren jeder endlichen Teilmenge von  $M$  linear unabhängig sind. Die *leere Menge* heißt **linear unabhängig**.

## 6 Basis und Dimension

### 6.1 Basis eines Vektorraums

Def1: Eine minimale erzeugende Menge  $B$  eines Vektorraums  $V$  heißt Basis von  $V$ .

S1: Eine Basis des Vektorraums  $V$  ist linear unabhängig.

S2: Eine linear unabhängige und erzeugende Menge eines Vektorraums  $V$  ist Basis von  $V$ .

## 6.2 Dimension eines Vektorraums

S1: Es sei  $V$  ein  $S$ -Vektorraum,  $V \neq \{0\}$ . Ferner sei  $E \subset V$  ein Erzeugendensystem von  $V$  und  $R \subset E$  eine linear unabhängige Menge,  $R \neq \emptyset$ . Dann gibt es eine Basis  $B$  von  $V$  mit  $R \subset B \subset E$ .

S2: Jeder VR hat eine Basis.

S3: **Basisergänzungssatz.** Jede Menge  $R$  von linear unabhängigen Vektoren eines Vektorraums  $V$  läßt sich zu einer Basis von  $V$  ergänzen.  
(nicht eindeutig bestimmt)

S4: Zu jedem Untervektorraum  $U_1$  eines VRs  $V$  gibt es ein Komplement  $U_2$ , d.h. einen Untervektorraum  $U_2$  von  $V$  mit  $V = U_1 \oplus U_2$ .

S5: Ist  $V$  ein endlich erzeugbarer VR,  $V \neq \{0\}$ , so hat  $V$  eine endliche Basis.

S6: Hat ein VR  $V$  eine endliche Basis  $B$  mit  $n$  Elementen ( $n \in \mathbb{N}$ ), so hat jede Basis  $B'$  von  $V$  ebenfalls  $n$  Elemente.

Def: Ein Vektorraum mit einer endlichen Basis heißt **endlichdimensional**. Die für alle Basen von  $V$  übereinstimmende Anzahl  $n$  der Elemente heißt **Dimension** von  $V$ . Wir bezeichnen  $V$  dann auch mit  $V^n$  und schreiben  $\dim V = n$ . Für  $V = \{0\}$ ,  $B = \emptyset$  setzen wir  $\dim \{0\} = 0$ .

Ein VR, der keine endliche Basis hat, heißt **unendlichdimensional**.

S7: Für einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gilt:

1. Je  $n+1$  Vektoren aus  $V^n$  sind linear abhängig
2. Je  $n$  linear unabhängige Vektoren aus  $V^n$  bilden eine Basis von  $V^n$ .

S8: Ist  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis eines  $n$ -dimensionalen VR  $V^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), so besitzt jeder

Vektor  $a \in V^n$  bezüglich der Basis  $B$  eine eindeutige **Basisdarstellung**: 
$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

S9: Sind  $c_1, \dots, c_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) Vektoren eines Vektorraums mit der Eigenschaft, daß sich jeder Vektor  $a \in V$  auf genau eine Weise als Linearkombination der  $c_i$  darstellen läßt, so ist  $V$   $p$ -dimensional, und  $\{c_1, \dots, c_p\}$  ist eine Basis von  $V$ .

S10: Ist  $U$  ein Untervektorraum eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $V^n$ , so ist  $U$  endlichdimensional, und es gilt  $\dim U \leq \dim V^n$ . Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $U = V^n$ .

S11: **Dimensionssatz.** Für zwei Untervektorräume  $U_1$  und  $U_2$  eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $V^n$  gilt

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 \cap U_2 + \dim U_1 + U_2$$

(Beweis und Zeichnung S. 67)

Bem: *Dimensionssatz für*  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$  :  $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 \oplus U_2$

(Beispiele S. 69)

### 6.3 Basiswechsel

Summenschreibweise:

$$\bar{b}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} b_j \quad i=1, \dots, n; \quad \alpha_{ji} \in S$$

$$\text{Übergangsmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

zum Basiswechsel von B nach  $\bar{B}$  (analog zum Basiswechsel von B nach  $\bar{B}$ , Übergangsmatrix heißt dann C)

$$\text{Kronecker-Symbole: } \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

da  $CA=AC=E$  gilt:  $C=A^{-1}$

Transformation der Komponenten

Basisdarstellung von x:  $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$ ,  $\xi_j \in S$ , analog für eine andere Basis:  $x = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \bar{b}_j$

$$\text{dann gilt: } x = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \bar{\xi}_i \right) b_j$$

es gilt also:  $\vec{x} = A \vec{\bar{x}}$

und  $\vec{\bar{x}} = C \vec{x}$  siehe auch S.72

# III Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme

## 7 Lineares Gleichungssystem und zugehörige lineare Abbildung

### 7.1 Lineares Gleichungssystem, Beispiele

Beispiel:  $A\vec{x} = \vec{a}$

wenn  $\vec{a}$  ein Nullvektor, dann ist es ein *homogenes* LGS.

### 7.2 Die zu einem LGS gehörige lineare Abbildung

siehe Kapitel 8.

## 8 Lineare Abbildungen

### 8.1 Definition und Beispiele

Def1:  $V$  und  $W$  seien  $S$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  heißt *linear*, wenn für alle  $a, b \in V$  und alle  $\lambda \in S$  gilt:

$$(L1) \quad \Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$$

$$(L2) \quad \Phi(\lambda a) = \lambda\Phi(a)$$

S1: ODER: (Zusammenfassung von L1 und L2) (L)  $\Phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\Phi(a) + \mu\Phi(b)$

Bem: aus L1 folgt:  $\Phi$  ist Homomorphismus der abelschen Gruppe  $(V,+)$  in die abelsche Gruppe  $(W,+)$ .

aus L2 folgt dann:  $\Phi$  ist auch bzgl. der  $S$ -Multiplikation verknüpfungstreu, daher *Lineare Abbildung = Homomorphismus*

**Monomorphismus** = injektiver Morphismus

**Epimorphismus** = surjektiver Morphismus

**Isomorphismus** = bijektiver Morphismus

**Endomorphismus** = Morphismus  $h: A \rightarrow A$ , der eine Algebra  $A$  in sich abbildet (für  $W=V$ )  
= lineare Selbstabbildung

**Automorphismus** = bijektiver Endomorphismus

- S2: Bei einer linearen Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  geht der Nullvektor  $o \in V$  in den Nullvektor  $o' \in W$  über.
- S3: Bei einer linearen Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  gehen linear *abhängige* Vektoren  $a_1, \dots, a_k \in V$  in linear abhängige Vektoren  $\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_k) \in W$  über.
- S4: Bei einer *injektiven* linearen Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  gehen linear *unabhängige* Vektoren  $a_1, \dots, a_k \in V$  in linear unabhängige Vektoren  $\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_k) \in W$  über.
- S5:  $\{b_1, \dots, b_n\}$  sei eine Basis eines  $S$ -Vektorraums  $V^n$  und  $b'_1, \dots, b'_n$  seien beliebig vorgegebene Vektoren eines  $S$ -Vektorraums  $W$ . Dann gibt es eine und nur eine lineare Abbildung  $\Phi : V^n \rightarrow W$  mit

$$\Phi(b_i) = b'_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

## 8.2 Kern und Bildraum einer linearen Abbildung, Faktorraum

Def:  $\Phi : V \rightarrow W$  sei eine lineare Abbildung. Als **Kern von  $\Phi$**  bezeichnen wir die Menge der Vektoren aus  $V$ , die durch die Abbildung  $\Phi$  auf den Nullvektor  $o' \in W$  abgebildet werden, also

$$\text{Kern } \Phi = \{x \in V \mid \Phi(x) = o'\}$$

- S1: Der Kern einer linearen Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  ist ein *Unterraum* von  $V$ .
- S2: Der Kern einer linearen Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  ist genau dann der *Nullraum*  $\{o\} \subset V$ , wenn  $\Phi$  injektiv ist.
- S3: Ist  $\Phi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so ist die Bildmenge  $\Phi(V)$  ein Untervektorraum des Zielraums  $W$ .  
 $\Rightarrow$  Bildmenge  $\Phi(V)$  nennen wir auch *Bildraum* von  $\Phi$ .

$K_{a'} = \{x \in V \mid \Phi(x) = a'\}$ , für  $a' = o'$  ist  $K_{o'} = \text{Kern } \Phi$  (ist UVR von  $V$ )  
für  $a' \neq o'$  ist  $K_{a'}$  kein Untervektorraum von  $V$  wegen  $o \notin K_{a'}$ .

**Klasseneinteilung** (Partition) möglich – definiert über eine **Äquivalenzrelation**,

z.B.:  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \text{Kern } \Phi$  (\*)

allgemeiner kann man definieren  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in U$  (\*\*), wobei  $U$  ein Untervektorraum von  $V$  ist (ebenfalls Äquivalenzrelation) – in der zugehörigen **Faktormenge**  $\tilde{V}$ , also für die Äquivalenzklassen, kann man nun Addition und  $S$ -Multiplikation erklären:

$$\tilde{x} + \tilde{y} := \overline{x + y} \quad \alpha \tilde{x} := \overline{\alpha x}$$

- S4: Zu jedem Untervektorraum  $U$  eines  $S$ -Vektorraums  $V$  gehört eine Äquivalenzrelation (\*) und eine Menge (Faktormenge)  $\tilde{V}$  von Äquivalenzklassen.  $\tilde{V}$  ist bzgl. der oben definierten Addition und  $S$ -Multiplikation ein  $S$ -Vektorraum

$\tilde{V}$  heißt Faktorraum von  $V$  nach  $U$ :  $\tilde{V} = V/U$ , die Elemente von  $\tilde{V}$  heißen auch Restklasse nach  $U$  (eine der Restklassen ist  $U$  selbst)

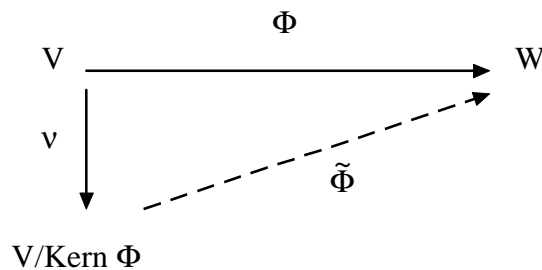
S5: Zu einer linearen Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$  gehört eine Klasseneinteilung (Faktormenge)  $\tilde{V}$ , wobei einer Klasse alle Elemente von  $V$  mit demselben Bildvektor angehören.  $\tilde{V}$  ist bezüglich der oben definierten Addition und  $S$ -Multiplikation der Faktorraum von  $V$  nach  $\text{Kern } \Phi$  (Schreibweise:  $\tilde{V} = V/\text{Kern } \Phi$ ).

**Kanonische Abbildung:**  $v : V \rightarrow V/\text{Kern } \Phi, x \mapsto \tilde{x}$   
bei gegebener linearer Abbildung  $\Phi : V \rightarrow W$

S6: **Homomorphiesatz für Vektorräume:** es sei  $\Phi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, dann ist

$$\tilde{\Phi} : V/\text{Kern } \Phi \rightarrow \Phi(V); \tilde{x} \mapsto \Phi(x) \text{ mit } x \in \tilde{x}$$

ein *Isomorphismus*. Folgendes Diagramm ist kommutativ, d.h. es ist  $\Phi = \tilde{\Phi} \circ v$ , wobei  $v$  die kanonische Abbildung (\*\*\*) ist.



### 8.3 Rang einer linearen Abbildung

Def1: Der **Rang** einer linearen Abbildung  $\Phi : V^n \rightarrow W$  ist die Dimension des Bildraumes von  $\Phi$ , also  $\text{Rang } \Phi = \dim \Phi(V^n)$

es gilt:  $\text{Rang } \Phi \leq \dim V^n = n$

und nach 6.2, Satz 10:  $\text{Rang } \Phi \leq \dim W^p = p$  (wenn der Zielraum die Dimension  $p$  hat)

S1: Für eine lineare Abbildung  $\Phi : V^n \rightarrow W$  gilt:  $\text{Rang } \Phi + \dim \text{Kern } \Phi = \dim V^n$   
(die Summe der Dimensionen des Kerns und des Bildraums von  $\Phi$  ist  $n$ )

S2: Eine lineare Abbildung  $\Phi : V^n \rightarrow W$  ist genau dann **injektiv**, wenn  $\text{Rang } \Phi = \dim V^n$ .

S3: Eine lineare Abbildung  $\Phi : V^n \rightarrow W^p$  ist genau dann **surjektiv**, wenn  $\text{Rang } \Phi = \dim W^p$ .

Def2: Zwei  $S$ -Vektorräume  $V, W$  heißen **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus  $\Phi : V \rightarrow W$  gibt.

S4: Zwei endlichdimensionale Vektorräume  $V^n, W^p$  über  $S$  sind genau dann **isomorph**, wenn sie die gleiche Dimension haben ( $n = p$ ).

## 9 Lösungstheorie der linearen Gleichungssysteme

### 9.1 Existenz der Lösung eines LGS

LGS: 
$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi_k = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, p, \text{ wobei } p, n \in \mathbb{N}, \alpha_{ik}, \alpha_i \in S$$

S1: (abgewandelt) ein LGS ist genau dann lösbar, wenn für die zugehörige lineare Abbildung  $\Phi$  und den Vektor  $\vec{a}$  gilt, daß  $\vec{a} \in \Phi(S^n)$ .

S2:  $\Phi : S^n \rightarrow S^p$  sei die zum LGS gehörige lineare Abbildung, und  $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$  seien die Spaltenvektoren der zum LGS gehörenden einfachen Matrix. Dann gilt  $\Phi(S^n) = [\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n]$

S3: Das LGS ist genau dann lösbar, wenn  $\dim[\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n] = \dim[\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n, \vec{a}]$

Def1: Ist

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Elementen  $\alpha_{ik} \in S$ , so heißt die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von  $A$  der **Rang der Matrix  $A$**  (Spaltenrang)  
(auf deutsch: Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der Staffelform)

S4: **Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme:**

Das LGS ist genau dann lösbar, wenn der Rang der einfachen Matrix des LGS gleich dem Rang der erweiterten Matrix des LGS ist.

### 9.2 Struktur der Lösungsmenge eines LGS

S1: Die Lösungsmenge  $L$  eines lösbaren LGS ist eine Restklasse nach dem Kern der linearen Abbildung  $\Phi$ . Ist  $\vec{x}_0 \in L$  eine beliebig gewählte Lösung des LGS, so gilt für die Lösungsmenge:

$$L = \{ \vec{x} \in S^n \mid \exists \vec{v} \in \text{Kern } \Phi : \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \}$$

**homogenes** LGS: 
$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi_k = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

S2: Es seien  $L$  die Lösungsmenge eines lösbaren LGS,  $L_h$  die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS und  $\vec{x}_0 \in L$  eine beliebig gewählte Lösung des LGS. Dann gilt:

$$L = \{\vec{x} \in S^n \mid \exists \vec{v} \in L_h : \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}\}$$

d.h. man erhält alle Lösungen eines LGS, wenn man zu einer bel. gewählten Lösung die Lösungen des *homogenen* LGS addiert:  $L = \vec{x}_0 + L_h = \vec{x}_0 + \text{Kern } \Phi$ .

S3: Ein lösbares LGS besitzt genau dann nur eine Lösung, wenn das zugehörige homogene LGS nur die triviale Lösung besitzt.

Bem: Ein homogenes LGS hat stets die triviale Lösung  $\vec{x}_0 = \vec{0} \in S^n$ .

S4: Ein homogenes LGS mit der Matrix  $A$  ist genau dann nichttrivial lösbar, wenn  $\text{Rang } A < n$  ist. Ist  $d = n - \text{Rang } A > 0$ , dann gibt es  $d$  linear unabhängige Lösungen  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \in S^n$  des homogenen LGS, und die Lösungsmenge  $L_h$  besteht aus allen

Linearkombinationen  $\vec{x} = \sum_{i=1}^d \lambda_i \vec{v}_i \quad (\lambda_i \in S) \quad \text{der } \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$ .

## 10 Das GAUSSsche Eliminationsverfahren

### 10.1 Elementaroperationen für ein LGS

*Elementaroperationen für ein LGS:*

- (I) Ersetzung der  $i$ -ten Gleichung durch ihr  $\lambda$ -faches ( $\lambda \in S, \lambda \neq 0$ )
- (II) Ersetzung der  $i$ -ten Gleichung durch die Summe der  $i$ -ten und der  $j$ -ten Gleichung

Bem: (aus wiederholter Anwendung von (I) und (II))

- (III) Ersetzung der  $i$ -ten Gleichung durch die Summe der  $i$ -ten Gleichung und dem  $\mu$ -fachen der  $j$ -ten Gleichung ( $i \neq j, \mu \in S$ )
- (IV) Vertauschung zweier Gleichungen

S1: Die Lösungsmenge des LGS wird bei einer der Elementaroperationen nicht geändert.

### 10.2 Das GAUSSsche Eliminationsverfahren

Zeilen in die Form bringen, daß sie mit  $1 \ x \ x \ \dots \ 0 \ 1 \ x \ x \ \dots \ 0 \ 0 \ 1 \ x \ x \ \dots$  usw. beginnen (Treppenform), dann Lösung ablesen.

### 10.3 Der Zeilenrang einer Matrix

S1: Der Spaltenrang einer Matrix  $A$  bleibt bei Elementaroperationen der *Zeilen* von  $A$  unverändert.

Def: Der Zeilenrang einer Matrix  $A$  ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von  $A$ .

S2: Der Zeilenrang einer Matrix  $A$  ist gleich dem Spaltenrang von  $A$ .

### 10.4 Äquivalente Matrizen

Def: Zwei Matrizen  $A, B \in S^{(p,n)}$  heißen *äquivalent* (Schreibweise  $A \sim B$ ), wenn sie denselben Rang haben.

S1: Zwei Matrizen  $A, B \in S^{(p,n)}$  sind genau dann äquivalent, wenn  $B$  aus  $A$  durch endlich viele Elementaroperationen der Zeilen- oder Spaltenvektoren hervorgeht.

S2: Zwei Matrizen  $A, B \in S^{(p,n)}$  sind genau dann äquivalent, wenn es eine Matrix  $S \in S^{(p,n)}$  mit  $\text{Rang } S = p$  und eine Matrix  $T \in S^{(n,n)}$  mit  $\text{Rang } T = n$  gibt, so daß gilt:  $B = SAT$

## IV Lineare Abbildungen und Matrizen

### 11 Der Vektorraum der linearen Abbildung

#### 11.1 Der Vektorraum $L(V,W)$

Def:  $V$  und  $W$  seien Vektorräume über demselben Körper  $S$ , und  $L(V, W)$  sei die Menge aller linearen Abbildungen von  $V$  in  $W$  – es wird nun eine Addition und eine  $S$ -Multiplikation erklärt:

Def: Es seien  $\Phi, \Psi \in L(V, W)$  und  $\lambda \in S$ . Dann heißt die Abbildung:

$\Phi + \Psi: \begin{cases} V \rightarrow W \\ x \mapsto (\Phi + \Psi)(x) := \Phi(x) + \Psi(x) \end{cases}$  die **Summe** von  $\Phi$  und  $\Psi$ , und die Abbildung:

$\lambda\Phi: \begin{cases} V \rightarrow W \\ x \mapsto (\lambda\Phi)(x) := \lambda\Phi(x) \end{cases}$  das  **$\lambda$ -fache** von  $\Phi$

S1: Es seien  $\Phi, \Psi$  lineare Abbildungen von  $V$  in  $W$ . Dann sind auch  $\Phi + \Psi$  und  $\lambda\Phi$  (für  $\lambda \in S$ ) lineare Abbildungen von  $V$  nach  $W$ .

S2:  $L(V,W)$  ist bezüglich der erklärten Addition und  $S$ -Multiplikation ein Vektorraum über  $S$ .

S3: Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale Vektorräume über  $S$ . Dann ist auch  $L(V,W)$  endlichdimensional und es gilt:  $\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W$

#### 11.2 Der Dualraum eines Vektorraums

Da man den Skalkörper  $S$  als einen eindimensionalen VR über sich selbst  $S^1$  auffassen kann, setzen wir nun  $W = S^1 = S$  und erhalten den Vektorraum  $L(V,S)$  aller linearen Abbildungen von  $V$  in den Skalkörper  $S$ . Man nennt  $L(V, S)$  auch **Dualraum**  $V^*$  von  $V$ . Seine Elemente, nämlich die linearen Abbildungen  $\Phi : V \rightarrow S$ , heißen auch **Linearformen** auf  $V$ .

weiter Stichworte: Bildung der **Dualbasis** von  $V^*$ ; (siehe S. 116)  
 $V^{**}$  : **Bidualraum** von  $V$

#### 11.3 Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung

Es sei  $V^n$  ein  $n$ -dimensionaler,  $W^p$  ein  $p$ -dimensionaler VR über demselben Körper  $S$  sowie  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  und  $C = \{c_1, \dots, c_p\}$  die dazugehörigen geordneten Basen.

Es sei  $\Phi(b_k) = \sum_{i=1}^p \alpha_{ik} c_i$ ;  $k = 1, \dots, n$   $\alpha_{ik} \in S$  eine lineare Abbildung von  $V^n$  nach  $W^p$

(Basisdarstellung), dann ist die **Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bzgl. der geordneten Basen B, C** eine wie folgt definierte (p,n)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

(in der k-ten Spalte von A stehen die Komponenten von  $\Phi(b_k)$  bzgl. C gemäß

$$\Phi(b_k) = \sum_{i=1}^p \alpha_{ik} c_i \quad (\dots \text{S. 117})$$

S1: In einem S-Vektorraum  $V^n$  sei eine geordnete Basis B und in einem S-Vektorraum  $W^p$  sei eine geordnete Basis C gewählt, Dann ist die Abbildung

$$\Theta_{BC}: L(V^n, W^p) \rightarrow S^{(p,n)}; \Phi \mapsto A,$$

die jeder linearen Abbildung  $\Phi: V^n \rightarrow W^p$  die Abbildungsmatrix  $A \in S^{(p,n)}$  bzgl. B, C gemäß  $\Phi(b_k) = \sum_{i=1}^p \alpha_{ik} c_i$  zugeordnet, *bijektiv*.

S2: Es sei A eine Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung  $\Phi: V^n \rightarrow W^p$ .  
Dann gilt:  $\text{Rang } \Phi = \text{Rang } A$

$$(*) \quad \begin{aligned} \Theta_{BC}(\Phi + \Psi) &= \Theta_{BC}(\Phi) + \Theta_{BC}(\Psi) \\ \Theta_{BC}(\lambda\Phi) &= \lambda\Theta_{BC}(\Phi) \end{aligned}$$

S3: Die Abbildung  $\Theta_{BC}: L(V^n, W^p) \rightarrow S^{(p,n)}$  ist ein Isomorphismus.

(mehr S. 120)

## 12 Die Algebra einer Selbstabbildung eines VR und der (n,n)-Matrizen

### 12.1 Verkettung linearer Abbildungen und Matrixprodukte

Es seien V, W, Z drei Vektorräume über demselben Körper S und  $\Phi: V \rightarrow W$ ,  $\Psi: W \rightarrow Z$  lineare Abbildungen.

S1: Sind  $\Phi: V \rightarrow W$  und  $\Psi: W \rightarrow Z$  lineare Abbildungen, so ist auch die Verkettung  $\Phi \circ \Psi: V \rightarrow Z$  linear.

S2: Die Abbildungsmatrix der Verkettung  $\Pi = \Psi \circ \Phi$  zweier linearer Abbildungen  $\Phi$  und  $\Psi$  ist das Produkt  $P = BA$  der Abbildungsmatrix  $B$  von  $\Psi$  mit der Abbildungsmatrix  $A$  von  $\Phi$  bzgl. der in den entsprechenden Vektorräumen eingeführten Basen gemäß:

$$\Theta_{BD}(\Phi \circ \Psi) = \Theta_{CD}(\Psi)\Theta_{BC}(\Phi)$$

(siehe auch Aufgabe 1 auf Seite 123)

## 12.2 Die Algebra der linearen Selbstabbildung eines Vektorraums

Annahme jetzt:  $V = W = Z \Rightarrow$  Abbildungen sind lineare Selbstabbildungen (Endomorphismen) von  $V$ ; Verkettung möglich und wieder Endomorphismus  $L(V, V)$  ist die Menge der Endomorphismen  $\Phi : V \rightarrow V$ .  
Der Vektorraum  $(L(V, V), +, \cdot)$  bildet mit einer weiteren inneren Verknüpfung  $\circ$  einen  $S$ -Vektorraum.

S1: Für einen  $S$ -Vektorraum  $V$  ist  $(L(V, V), +, \cdot, \circ)$  eine  $S$ -Algebra [sie heißt **Endomorphismenalgebra** von  $V$ ]

Bem1: Der Endomorphismenring ist i.a. nicht kommutativ

Algebraisomorphismus:

Für alle Endomorphismen  $\Phi, \Psi \in L(V^n, V^n)$  und  $\lambda \in S$  (nach 11.3 (\*) und 12.1 S2):

$$\Theta_{BB}(\Phi + \Psi) = \Theta_{BB}(\Phi) + \Theta_{BB}(\Psi)$$

$$\Theta_{BB}(\lambda\Phi) = \lambda\Theta_{BB}(\Phi)$$

$$\Theta_{BB}(\Phi \circ \Psi) = \Theta_{BB}(\Psi) \bullet \Theta_{BB}(\Phi)$$

außerdem:  $\Theta_{BB}(\text{id}_V^n) = E$

S2: Sei  $V^n$  ein  $n$ -dimensionaler  $S$ -Vektorraum mit einer Basis  $B$ . Dann ist  $\Theta_{BB}$  ein Algebraisomorphismus zwischen den Endomorphismenalgebren  $(L(V^n, V^n), +, \cdot, \circ)$  und der Matrizenalgebra  $(S^{(n, n)}, +, \cdot, \bullet)$ .

## 12.3 Die Gruppe der Automorphismen eines Vektorraums und der regulären $(n, n)$ -Matrizen

Wir betrachten jetzt in der Menge  $L(V, V)$  der Endomorphismen des Vektorraums  $V$  über  $S$  die Teilmenge der bijektiven linearen Selbstabbildungen, also der **Automorphismen** von  $V$ .  
Bezeichnung dieser Menge:  **$GL(V)$**

S1:  $GL(V)$  ist bezüglich der Verkettung eine Gruppe [**lineare Gruppe** oder **Automorphismengruppe** von  $V$ ]

S2: Eine lineare Selbstabbildung  $\Phi$  von  $V^n$  ist genau dann bijektiv, wenn die Abbildungsmatrix von  $\Phi$  bzgl. der Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  den Rang  $n$  hat.

Def: Eine  $(n,n)$ -Matrix  $A$  mit  $\text{Rang } A = n$  heißt **regulär**. Ist  $\text{Rang } A < n$ , so heißt  $A$  **singulär**. Die Menge der regulären  $(n,n)$  Matrizen bezeichnen wir mit  $GS^{(n,n)}$ . (Den Automorphismen von  $V^n$  entsprechen also genau die regulären Matrizen.)

S3:  $GS(n,n)$  ist bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

Bem: Nach S3 gibt es also in der Gruppe  $GS(n,N)$  der regulären  $(n,n)$ -Matrizen über  $S$  zu jeder Matrix  $A$  genau eine **inverse Matrix**  $A^{-1}$  mit

$$AA^{-1} = E = A^{-1}A$$

Berechnung der inversen Matrix:

lösen der LGSe  $Ax_k = e_k$ , wobei  $x_k$  dann die Spaltenvektoren der Inversen sind. (in *einem* LGS möglich – Bsp. auf Seite 127)

## 12.4 Ähnliche Matrizen

Def1: Zwei Matrizen  $A, \bar{A} \in S^{(n,n)}$  heißen **ähnlich**, wenn sie Abbildungsmatrizen des Endomorphismus  $\Phi : V^n \rightarrow V^n$  eines  $S$ -Vektorraums  $V^n$  sind.

S1: Zwei Matrizen  $A, \bar{A} \in S^{(n,n)}$  sind genau dann ähnlich, wenn es eine reguläre  $(n,n)$ -Matrix  $T$  über  $s$  gibt, so daß gilt:

$$\bar{A} = T^{-1}AT$$

Def2: Ist  $A = (\alpha_{ik})$  eine  $(n,n)$ -Matrix über  $S$ , so heißt die Summe der Hauptdiagonalelemente die **Spur von  $A$** , geschrieben:

$$\text{Spur } A = \sum_{j=1}^n \alpha_{jj}$$

S2: Sind  $B, C$  zwei  $(n,n)$ -Matrizen über  $S$ , so gilt:  $\text{Spur } BC = \text{Spur } CB$

S3: Sind  $A, \bar{A}$  ähnliche Matrizen, so gilt:  $\text{Spur } A = \text{Spur } \bar{A}$

Nach Definition 1 ist die Ähnlichkeit in  $S^{(n,n)}$  eine Äquivalenzrelation. Die Spur ist eine **Invariante der Ähnlichkeitsklasse** (für alle Elemente gleich).

Def3: Unter der **Spur eines Endomorphismus**  $\Phi$  eines  $n$ -dimensionalen VR  $V^n$  verstehen wir die Spur irgendeiner Abbildungsmatrix  $A$  von  $\Phi$ ; geschrieben:  $\text{Spur } \Phi = \text{Spur } A$

## **12.5 Das Minimalpolynom**

### **12.5.1 Teilbarkeit in $S[x]$**

Def1: Für zwei Polynome  $f, g \in S[x]$  mit  $f \neq 0$  sagt man  $f$  teilt  $g$  [bzw.  $f$  ist ein Teiler von  $g$ ], wenn es ein Polynom  $h \in S[x]$  gibt mit  $g = hf$ . [Schreibweise:  $f|g$ ]. Ferner heißt ein Nichtnullpolynom normiert, wenn für den Koeffizienten  $\alpha_k$  der höchsetn Potenz  $\alpha_k = 1$  gilt.

### **12.5.2 Das Minimalpolynom eines Endomoprphismus**

### **12.5.3 Das Minimalpolynom einer quadratischen Matrix**

## **13 Eigenwerte und Eigenvektoren. Normalformen**

### **13.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Endomorphismen und Matrizen**

### **13.2 Diagonalisierbare Endomorphismen**

### **13.3 Die Jordansche Normalform einer Matrix**

#### **13.3.1 Haupträume**

#### **13.3.2 Die Jordansche Blockmatrix**

#### **13.3.3 Die Jordansche Normalform**

#### **13.3.4 Ein Beispiel**

#### **13.3.5 Jordansche Normalform einer Matrix**

#### **13.3.6 Eigenschaften der jordanschen Normalform**

# **V Determinanten**

## **14 Determinantenformen**

### **14.1 Multilinearformen**

### **14.2 Determinantenformen**

### **14.3 Die Entwicklungsformel**

### **14.4 Existenz von Determinantenformen**

## **15 Die Determinante eines Endomorphismus einer Matrix**

### **15.1 Die Determinante eines Endomorphismus**

### **15.2 Die Determinante einer $(n,n)$ -Matrix**

### **15.3 Sätze über Determinanten von $(n,n)$ -Matrizen**

## **16 Anwendungen der Determinantentheorie**

### **16.1 Anwendungen der Determinantentheorie auf lineare Gleichungssysteme**

### **16.2 Das Charakteristische Polynom eines Endom. einer Matrix**

### **16.3 Orientierung eines Vektorraums über einen angeordneten Körper**

## **VI Vektorräume mit Skalarprodukt**

### **17 Euklidische Vektorräume**

#### **17.1 Das Skalarprodukt**

##### **17.1.1 Euklidische Vektorräume**

##### **17.1.2 Unitäre Vektorräume**

##### **17.1.3 Metrische Vektorräume**

##### **17.1.4 Fundamentalmatrix eines Skalarprodukts**

#### **17.2 Die Norm eines vektors. Normierte Vektorräume**

#### **17.3 Winkelmaß**

#### **17.4 Orthogonalität**

##### **17.4.1 Grundlagen**

##### **17.4.2 Fundamentalmatrix bzgl. einer Orthogonalbasis**

##### **17.4.3 Orthogonales Komplement**

##### **17.4.4 Orthogonale Projektion**

##### **17.4.5 Abstand eines Vektors zu einem Untervektorraum**

##### **17.4.6 Satz von Riesz**

##### **17.4.7 Das HURWITZsche Definitionskriterium**

#### **17.5 Orthogonale und unitäre Matrizen**

#### **17.6 Unitäre Erweiterung eines euklidischen Vektorraums**

### **18 Orientierte euklidische Vektorräume**

#### **18.1 Definition. Normierte Determinantenformen**

#### **18.2 Das Orientierte Winkelmaß in $(E_2, \Delta)$**

#### **18.3 Das äußere Produkt in $(E_3, \Delta)$**

### **19 Normale Endomorphismen**

#### **19.1 Die adjungierte Abbildung**

#### **19.2 Normale Endomorphismen**

##### **19.2.1 Normale Endomorphismen von unitären Vektorräumen**

##### **19.2.2 Normale Endomorphismen von euklidischen Vektorräumen**

#### **19.3 Selbstadjungierte Endomorphismen**

#### **19.4 Isometrien**

#### **19.5 Normalformen einer Isometrie. Klassifikation der Isometrien**

##### **19.5.1 Isometrien von unitären Vektorräumen $U_n$**

##### **19.5.2 Isometrien eines euklidischen Vektorraums $E^n$**

## **VII Affine Geometrie**

### **20 Affine Räume**

#### **20.1 Definition eines affinen Raumes**

#### **20.2 Affine Unterräume**

#### **20.3 Einige Sätze der ebenen affinen Geometrie**

#### **20.4 Durchschnitt und Verbindungsraum affiner Unterräume**

- 20.5 Affine Hülle von affin unabhängigen Punkten**
- 20.6 Affine Unterräume als Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme**

## **21 Affine Abbildungen**

- 21.1 Affine Abbildungen und zugehörige lineare Abbildungen**
- 21.2 Geometrische Eigenschaften affiner Abbildungen**
- 21.3 Affinitäten. Die affine Gruppe**
- 21.4 Koordinatendarstellung affiner Abbildungen**
- 21.5 Fixelemente affiner Selbstabbildungen**
- 21.6 Klassifikation der affinen Abbildung**
  - 21.6.1 Klassifikation der affinen Selbstabbildungen eines reellen 2-dimensionalen affinen Raumes**
  - 21.6.2 Klassifikation der affinen Selbstabbildungen eines komplexen n-dimensionalen affinen Raumes**

## **22 angeordnete affine Räume**

- 22.1 Konvexe Mengen**
- 22.2 Simplexe, Spate, Halbräume**
- 22.3 Orientierte affine Räume. Volumen von n-Spalten**

## **VIII Euklidische Räume**

### **23 Euklidische Punkträume**

- 23.1 Definition der euklidischen Raumes. Abstand zweier Punkte**
- 23.2 Euklidische Unterräume**
- 23.3 Orientierte euklidische Räume**

### 24 Bewegungen

- 24.1 Definition einer Bewegung. Die Bewegungsgruppe des  $\mathbb{E}^n$
- 24.2 Klassifikation der Bewegung
- 24.3 Ähnlichkeitsabbildung des  $\mathbb{E}^n$

### IX Quadriken

### 25 Quadriken im $\mathbb{A}^n$

- 25.1 Definition einer Quadrik
- 25.2 Normalformen von Quadrikgleichungen
- 25.3 Mittelpunkte bei Quadriken
- 25.4 Entartete Quadriken
- 25.5 Eigentlichen und nichteigentliche Quadriken
- 25.6 Klassifikation der Quadriken im reellen und im komplexen  $\mathbb{A}^n$
- 25.7 Schnitte eigentlicher Quadriken mit affinen Räumen
- 25.8 Weitere geometrische Eigenschaften eigentlicher Quadriken

## 26 Quadriken im $\mathbb{E}^n$

26.1 Definition einer Quadrik im  $\mathbb{E}^n$

26.2 Hauptachsentransformation einer symmetrischen Bilinearform

26.3 Quadriken im  $\mathbb{E}^n$

26.4 Weitere geometrische Eigenschaften