Notizen zu LA

Eigenschaften *zweistelliger Relationen* $\rho \subseteq M^2$ $x, y, z \in M$

- **reflexiv** = $\forall x$: $x \rho x$
- **irreflexiv** = für kein x: $x \rho x$
- **symmetrisch** = $\forall x,y$: $x \rho y \Rightarrow y \rho x$
- **antisymmetrisch** = $\forall x,y$: $x \rho y$ und $y \rho x \Rightarrow x = y$
- **asymmetrisch** = $\forall x,y$: $x \rho y$ gilt $\Rightarrow$ $y \rho x$ gilt nicht
- **transitiv** = $\forall x,y,z$: $x \rho y$ und $y \rho z \Rightarrow x \rho z$
- **antitransitiv** = $\rho^n \cap \rho \neq \varnothing \ \forall n \geq 2$
- **alternativ (vergleichbar)** = $\forall x,y$: entweder $x \rho y$ oder $y \rho x$ gilt

---

die Relation ρ heißt:

- **<u>Äquivalenzrelation</u>** = reflexiv, symmetrisch und transitiv
- **Halbordnung** = **<u>Ordnungsrelation</u>** = **partielle Ordnung** = reflexiv, antisym., transitiv
- **strenge Halbordnung** = **strenge Ordnung** = irreflexiv und transitiv
- **Quasiordnung** = reflexiv und transitiv
- **lineare Ordnung** = **<u>totale Ordnung</u>** = alternative Halbordnung
- **inverse Relation** = **transponierte Relation** = $\rho^{-1} \subseteq M^2$ = $x \rho y \Leftrightarrow y \rho^{-1} x$

Klasseneinteilung in A :
1. keine Klasse ist leer („Klasse“ ist Teilmenge von A)
2. der Durchschnitt von je zwei versch. Klassen ist leer
3. die Vereinigung aller Klassen ist A

(A, H) und (B,) seien Verknüpfungsgebilde (V.geb. sind abgeschlossen!), h: $A \rightarrow B$

Homomorphismus: $\forall x, y \in A$: h(x H y) = h(x)   h(y)

(d.h.: ist x H y = z in A $\Rightarrow$ h(x)   h(y) = h(z) in B)

Gruppe:
abgeschlossen
assoziativ
neutrales Element
Inverses

<u>abelsche Gruppe</u>: zusätzlich *kommutativ*

Untergruppenkriterien: $U \subset A$ ist Untergruppe der Gr. (A, H) bzgl. H, wenn:
1. $U \neq \varnothing$
2. $\forall a, b \in U$: $a \, H \, \bar{b} \in U$

Bem: das homomorphe Bild einer Gruppe ist wieder eine Gruppe.

Ring (R, +, ·):
1. (R, +) ist <u>abelsche Gruppe</u>
2. (R, ·) ist <u>assoziativ</u> (und <u>abgeschlossen</u> (auch zeigen!))
3. die <u>Distributiv</u>gesetz**e** gelten (beide müssen bewiesen werden!)

wenn der Ring <u>*kommutativ* (d.h. (R,·) ist komm.)</u>, so folg das zweite Distributivgesetz aus dem ersten [eins reicht dann]

neutr, Element in (R, +): *Nullelem.*; zu a *inv. Element*: -a; neutr. Element bzgl. · : *Einselem.*

Körper: Ring (R, +, ·), mit: (R \ {0}, ·) ist <u>abelsche Gruppe</u> Bem: Ring mit Nullteilern ist *kein* K.

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

$z_1 + z_2 = \alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2)$ Bem: wie gewohnt: $\boxed{\mathbf{i^2 = -1}}$

$z_1 z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$

Einselement: 1 ***multiplikative Inverse*** von $(\alpha + i\beta) \neq 0$: $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i\dfrac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$

konjugiert komplexe Zahl (zu $z = \alpha + i\beta$): $\bar{z} = \alpha - i\beta = (\alpha, -\beta)$

(Absolut-)***Betrag*** von z: $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$	$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$	$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};\ z_2 \neq 0$	$\bar{\bar{z}} = z$
$z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 0$		$\mathrm{Re}\ z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$	$\mathrm{Im}\ z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

S-Vektorraum (V,+,·): V Menge, S ein Körper; $\oplus$: $V \times V \to V$; $\bullet$: $S \times V \to V$

- (V,+) ***abelsche*** *Gruppe*
- a,b $\in$ V; $\alpha, \beta \in$ S gilt

(m1) $1 \bullet a = a$

(m2) $\alpha \bullet (\beta \bullet a) = (\alpha\beta) \bullet a$ (vergl. Assoziativges.)

(m3) $(\alpha + \beta) \bullet a = \alpha \bullet a \oplus \beta \bullet a$ (vergl. 1. Distributivges.)

(m4) $\alpha \bullet (a \oplus b) = \alpha \bullet a \oplus \alpha \bullet b$ (vergl. 2. Distributivges.)

Unterverktorraum:

(U1) $U \neq \emptyset$

(U2) $\forall a,b \in U\ \ \forall \lambda \in S$: $a + b \in U \ \wedge\ \lambda a \in U$

bzw. $\forall a,b \in U\ \ \forall \lambda,\mu \in S$: $\lambda a + \mu b \in U$

(*Abgeschlossenheit!!*)

S-Algebra (A,+,·,•): (A, +, ·) ist S-Vektorraum (jetzt: ·: $S \times A \to A$)

(A, +, •) ist Ring mit Einselement (+,•: $A \times A \to A$)

$(\lambda \cdot a) \bullet b = a \bullet (\lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a \bullet b)$ $\forall a,b \in A\ \ \forall \lambda \in S$

(*Verträglichkeitsbedingung*)

$\mathcal{U}$: Menge aller UVR eines VR V, die eine gegebene Menge $M \subset V$ enthalten

- $D = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ ist UVR von V. ($\mathcal{U}$: Menge aller UVR eines VR V, die e. gegebene Menge $M \subset V$ enth.)
- $[M] = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt
- ***Summe der UVR***e U_1, U_2: $U_1 + U_2 = [U_1 \cup U_2]$ (ist wieder UVR)

  = Menge aller Vektoren $w = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$

die Summe U_1+U_2 heißt ***direkte Summe*** $U_1 \oplus U_2$, wenn $\underline{U_1 \cap U_2 = \{o\}}$; es gilt: $\underline{\dim U_1 \cap U_2 = 0}$

U_1+U_2 ***direkt*** $\Leftrightarrow$ zu jedem $w \in U_1+U_2$ gibt es *genau zwei* Vektoren $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $w = u_1+u_2$.

analog bei mehr als zwei Untervektorräumen – auch unendlich viele.

---

lineare Hülle von M : [M]. („alle Linearkombinationen") – für $M = \emptyset$: $[M] = \{o\}$.

---

linear abhängig: es gibt $\alpha_1, ..., \alpha_p \in$ S: $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i = o$: $\exists$ mind ein $\alpha_i \neq 0$

linear unabhängig: $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i = o \ \Rightarrow\ \alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$

Dimensionssatz: $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 \cap U_2 + \dim U_1 + U_2$

für $U_1 \cap U_2 = \{o\}$ (Summe direkt) : $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 \oplus U_2$

Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$: (siehe Handgeschriebenes hinten)

Basiswechsel von B nach $\overline{B}$: aus Gleichungen $\overline{b}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} b_j$ i=1,...,n; $\alpha_{ji} \in S$

bekommt man ***Übergangsmatrix*** $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ („Zeilen-αs werden zu Spalten!“)

$\boxed{\vec{x} = A\vec{\overline{x}}}$ $\boxed{\vec{\overline{x}} = C\vec{x}}$ wobei $C=A^{-1}$ bzw. C aus $b_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \overline{b}_i$: Matrix mit γ_{ij} (wie oben)

$C=A^{-1}$, da $CA=AC=E$ gilt ***„kontragradiente Transformation“!!***

Lineare Abbildung = Homomorphismus: (L1) $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$

(L2) $\Phi(\lambda a) = \lambda\Phi(a)$

oder: (L) $\boxed{\Phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\Phi(a) + \mu\Phi(b)}$

Monomorphismus = injektiver Homomorphismus **Epimorphismus** = surjektiver Homomorphismus

Isomorphismus = bijektiver Homomorphismus ⇔ det ≠ 0

Endomorphismus = lin. Selbstabb. = Morphismus $h: A \to A$ **Automorphismus** = bijektiver *Endo*morphismus

bei Homomorphismus: lin. abhängige Vektoren → lin. abhängige Vektoren

bei Epimorphismus (Φ injektiv): lin. unabhängige Vektoren → lin. unabhängige Vektoren

bei linearer Abb. $\Phi : V^n \to W$: $\boxed{\text{Rang } \Phi + \dim \text{Kern } \Phi = \dim V^n}$

injektiv ⇔ Rang $\Phi = \dim V^n$ (⇔ dim Kern $\Phi = \{o\}$) ***surjektiv*** ⇔ Rang Φ = dim W

V,W ***isomorph*** ⇔ ∃ Isomorphismus $\Phi : V \to W$ ⇔ dim V = dim W

Homomorphiesatz für Vektorräume: es sei $\Phi : V \to W$ lin. Abb.

⇒ $\tilde{\Phi}$: V/Kern $\Phi \to \Phi(V)$; $\tilde{x} \mapsto \Phi(x)$ mit $x \in \tilde{x}$ ist Isomorphismus.

Rang der Matrix A (Spaltenrang): Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A

(auf deutsch: Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der Staffelform)

= (Zeilenrang): Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A

Lösung von ***LGS***: Restklasse nach dem Kern (= eine Lsg.+Lsg. d. homogenen LSG) Lsg.+Kern

$A\vec{x} = \vec{b}$ nichttrivial lösbar ⇔ det $A = 0$

Matrizen äquivalent: gleicher Rang – durch Elementarop. in Zeilen und Spalten ineinander überführen

regulär: (n, n)- Matrix mit Rang = n (det ≠ 0) ⇒ **invertierbar** !!!

L(V, W): Menge aller lin. Abb. von V in W (V und W endlichdim. ⇒ dim L(V,W) = dim V · dim W)

L(V,S) (lin. Abb. von V in den Skalarkörper S): **Dualraum V*** von V – seine Elem. (die linearen Abbildungen $\Phi : V \to S$): **Linearformen** auf V.

zu $\{b_1,...,b_n\}$ gehörige **Dualbasis** von V*: $\{\Phi_1,..., \Phi_n\}$ mit $\Phi_j(b_k) = \delta_{jk}$ ($\{b_1,...,b_n\}$ Basis von V)

Dualbasis von V* (sonst): zeigen: $\{b_1,...,b_n\}$ Basis von V und $\{\Phi_1(b_1)..., \Phi_n(b_n)\}$ lin. unabh.

V** : **Bidualraum** von V (S. 116)

Minimalpolynom: **1.** $m_A(A)=0$ **2.** kleinstes Polynom mit f ≠ 0 mit f(A) = 0 **3.** normiert

charakteristisches Polynom: $\det(A-\lambda\varepsilon) =: p_A(\lambda)$ $p_A(A) = 0$ $\boxed{m_A \text{ teilt } p_A}$

λ ist ***Eigenwert*** ⇔ $\Phi(x) = \lambda x$ (x = ***EigenVektor***) ⇔ $AX = \lambda X$ ⇔ $m_A(\lambda) = 0$ ⇔ $p_A(\lambda) = 0$

⇔ Rang(Φ-λid) = Rang($A-\lambda\varepsilon$) < n (bei Endomorphismus von V^n)

EWe verschieden ⇒ EVen lin. **un**abh.

Eigenraum: K_λ = Kern($A-\lambda\varepsilon$) (⇒ LGS ($A-\lambda\varepsilon|0$)) (bzw. Kern(Φ-λid) = Raum, aus EVen ∪ {o})

---

diagonalisierbarer Endomorphismus (von V^n) ⇔ ∃ Basis aus EVen

⇔ Summe der Dimensionen von ERen =n

⇔ ∃ Diagonal-Matrix $\tilde{A} = S^{-1}AS$ mit:

in S stehen EVen spaltenweise!!

Haupträume: $H_\lambda = K_\lambda^{(q)}$ = Kern $(\Phi-\lambda id)^q$ $q = 1,...,n$ bis $K_\lambda^{(q)}$ konstant (n: Exponenten von m_A!!)

Determinate: (siehe Handgeschriebenes hinten)

JNF:

1. **EW**e bestimmen: mit Zeilen und Spaltenumf.: Rang$(A-\lambda\varepsilon) < n \Leftrightarrow \lambda$ ist EW oder oder Nullstellen von char. Polynom (det$(A-\lambda\varepsilon)$) (Minimalp.)
2. **Haupträume** (Kern $(\Phi-\lambda id)^q$) zu EWen best. (jeweils q, bis $K^{(q)}$ bzw. Rang $K^{(q)}$ konst.)
3. **Anzahl der Kästchen** bestimmen (s_1 größtes)

$s_1 = \dim K^{(q)} - \dim K^{(q-1)}$

$s_k = \dim K^{(q-k+1)} - \dim K^{(q-k)} - (s_1+...+s_{k-1})$

$s_q = \dim K^{(1)} - (s_1+...+s_{q-1})$

- **Anzahl** der Jordanblöcke = Anz. der EW
- Größe der Jordanblöcke = Exponenten im charakerist. Polynom = dim Kern$(\Phi-\lambda id)^q$ $= n\text{-Rang}(A-\lambda\varepsilon)^q$
- **Gesamtzahl** der Jordankästchen zu λ = n-Rang$(A-\lambda\varepsilon)$ = dim des Eigenraums zu λ
- Anzahl der Jordankästchen zu λ mit Länge $\geq k$ $= \dim H_\lambda^{(k)} - \dim H_\lambda^{(k-1)}$ $= \text{Rang}(A-\lambda\varepsilon)^{k-1} - \text{Rang}(A-\lambda\varepsilon)^k$
- Größe des größten Jordankästchens = q = Exponent im Minimalpolynom

Jordanbasis: (siehe Handgeschriebenes hinten)

Basiswechselmatrix S mit $S^{-1}AS$ = JNF : $S = (S_1,...,S_n)$ = Jordanbasisvektoren

Cayley-Hamilton: Polynom mit Matrizen teilen duch char. Polyn. $\Rightarrow$ Rest ausrechnen

n-fache ***multilineare Abb.:*** in jedem Argument lineare Abb.

alternierend: =0, wenn 2 Argumentstellen gleich $\Phi(a,a)=0$ und $\Phi(a,b) = -\Phi(b,a)$, ...

nichttrivial: $\neq 0$ für ein x (nicht Nullabb.)

n-fache ***Multilinearform***: in jedem Argument lineare Linearform

Determinantenform: nichttrivial, multilinear, alternierend

Skalarprodukt: positiv definite Hermite-Form (in *R*: pos. definite, symmetrische Bilinearform)

(*pos. definit:* $\forall a \in V: F(a,a) \geq 0 \wedge F(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow a = 0$)

Hermite-Form:
- linear im ersten Argument
- $H(b,a) = \overline{H(a,b)}$ (Hermite-Eigenschaft) **WICHTIG** auch bei Skalarprod.
- $H(a, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2) = \overline{\mu_1} H(a, b_1) + \overline{\mu_2} H(a, b_2)$

Rechenregeln S. 203 beachten !!! (auch: Hermite-Form)

Norm: Definitheit $\|a\| \geq 0$; $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Homogenität $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$

Dreiecksungleichung $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

Fundamentalmatrix bzgl. ONB = ε; sonst: Skalarprod. der Basisvekt.: $g_{kj} = \langle b_k, b_j\rangle = \overline{g_{jk}}$

Hermite-Matrix: wenn gilt: $G = G^*$ ($G^* = \overline{G}^T$)

$\Rightarrow$ Fundamentalmatrix ist **Hermite-Matrix (in *C*)** bzw. **symmetrisch (in *R*)**

Parrallelogrammidentität: $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

S. 211: $\langle a,b\rangle = 1/2(\|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2)$

Orthogonalsystem: $M \neq \emptyset$; $o \notin M$; $a \perp b$ für je zwei versch. Vektoren von M

Orthogonalisierung nach E.Schmidt: $c_1 = b_1$; $c_{r+1} = b_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b_{r+1}, c_k\rangle}{\langle c_k, c_k\rangle} \cdot c_k$

Abstand** d* des Vektors $\vec{c}$ zu ***UVR U: $\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}$ $\vec{u} \in$ U, $\vec{w} \in U^\perp$, $\vec{w}$ ist Orthgon.-Projektion von $\vec{c}$ auf $U^\perp$, dann: **d =** $\|\vec{w}\|$

Matrix orthonormiert (= ***orthogonal***, in *R*) bzw. ***unitär*** (in *C*) (2reihig: cos/sin - S.224)

$\Leftrightarrow$ Zeilen bzw. Spaltenvektoren bilden ONB	Zeilen und Spaltenvektoren bilden ONB
$\Leftrightarrow$ $A^T = A^{-1}$	$A^* = A^{-1}$
$\Leftrightarrow$ A^T orthogonal	A^* unitär
$\Leftrightarrow$ $A^TA = AA^T = \varepsilon$	$A^*A = AA^* = \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Übergangsmatrix zwischen zwei Orthonormalbasen

$\Rightarrow$ $|\det A| = 1$ (Achtung: nur notwendig, nicht hinreichend!)

Matrix ***schiefsymmetrisch*** $\Leftrightarrow$ $A^T = -A$

Normierte Determinantenform $\boldsymbol{\Delta_0}$ = 1 für positive ONB, = -1 für negative ONB

Identität von Lagrange: $\mathbf{\Delta_0(x_1,...,x_n)\ \Delta_0(y_1,...,y_n) = det(<x_i, y_k>)}$ (Matrix!!)

Kreuzprodukt: $E^3 \times E^3 \to E^3$, def. durch $\mathbf{\Delta_0(a, b, x) = <a \times b, x>}$ ($\ddot{A}_1$) bis ($\ddot{A}_{10}$) sieh Köpping S.7

Berechnung: $a \times b = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$; bei Standardbasis: $a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Adjungierte Abbildung Φ*: $\forall$ x$\in$V, $\forall$y$\in$W: $\mathbf{<\Phi(x), y> = <x, \Phi^*(y)>}$ V endl.dim.$\Rightarrow$ genau eine!

Abbildungsmatrix von $\mathbf{\Phi}^*$: A^* bzw. A^T (**nur** A bzgl. *ONB*!!) $\mathbf{\Phi}$: V $\to$ W; $\mathbf{\Phi}^*$: W $\to$ V

$(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi})^* = \mathbf{\Phi}^* + \mathbf{\Psi}^*$ $(\lambda\mathbf{\Phi})^* = \overline{\lambda}\,\mathbf{\Phi}^*$ $(\mathbf{\Phi} \circ \mathbf{\Psi})^* = \mathbf{\Psi}^* \circ \mathbf{\Phi}^*$ $\mathbf{\Phi}^{**} = \mathbf{\Phi}$

normaler Endomorphismus $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Phi} \circ \mathbf{\Phi}^* = \mathbf{\Phi}^* \circ \mathbf{\Phi}$ bzw. $AA^* = A^*A$ (normale Matrix)

$\Leftrightarrow$ **es gibt ONB aus Eigenvektoren** $\Rightarrow$ $\mathbf{\Phi}$ diagonalisierbar!(s.u)

$\Leftrightarrow$ $<\mathbf{\Phi}(x), \mathbf{\Phi}(y)> = <\mathbf{\Phi}^*(x), \mathbf{\Phi}^*(y)>$

$\Leftrightarrow$ $\|\mathbf{\Phi}(x)\| = \|\mathbf{\Phi}^*(x)\|$,

$\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Phi}^*$ haben gleichen EV, doch λ EW von $\mathbf{\Phi}$ $\Rightarrow$ $\overline{\lambda}$ EW von $\mathbf{\Phi}^*$

EV zu versch. EW stehen senkrecht aufeinander

n.E. ist ***diagonalisierbar***: $\exists$ T mit: ***Normalform*** $D = T^*AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$; λ_i: EWe von $\mathbf{\Phi}$

& T besteht aus normierten Eigenvektoren von A (alle ONBs der ERe)

& T ist *unitär*, also $T^T = T^{-1}$ bzw. $T^* = T^{-1}$

selbstadjungierter Endomorphismus $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{\Phi}$; in *R*: $\Leftrightarrow$ $A = A^T$ (symmetrisch)

ist normal, char. Polynom: n Linearfaktoren; *im unitären VR:* selbstadj. $\Leftrightarrow$ $<\mathbf{\Phi}(x), x> \in R$

$\mathbf{\Phi}$ selbstadj. $\Rightarrow$ $V = K_1 \oplus ... \oplus K_r$, K_i = Eigenraum zu EW $\lambda_i \in R$ $K_i \perp K_j$ für $i \neq j$

Φ Isometrie: $\Leftrightarrow$ $\forall$ x $\in$ V: $\|\mathbf{\Phi}(x)\| = \|x\|$ ($\mathbf{\Phi}$ längeninvariant)

$\Leftrightarrow$ $\forall$ x,y $\in$ V: $<\mathbf{\Phi}(x), \mathbf{\Phi}(y)> = <x, y>$

$\Leftrightarrow$ Abbildungsmatrix bzgl. ONB. unitär (orthogonal)

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Phi}^* \circ \mathbf{\Phi} = id_V$, $A^*A = \varepsilon$; Spaltenvekt. der Abb.matrix bilden ONB, etc. (s.o)

$\Leftrightarrow$ bei Automorphismus: $\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{\Phi}^{-1}$

$\Leftrightarrow$ bei normalem Endomorphismus: $|\lambda| = 1$ $\forall$ EWe ($D = T^*AT$ mit $|\lambda_k| = 1$)

$\Rightarrow$ $\mathbf{\Phi}$ injektiv (auch surjektiv bei endl. Dimension)

$\Rightarrow$ $\omega(\mathbf{\Phi}(x), \mathbf{\Phi}(y)) = \omega(x, y)$ (Winkelinvarianz)

$\Rightarrow$ $|\det \mathbf{\Phi}| = 1$ $\Rightarrow$ es gibt nur EW mit Betrag 1

$\Rightarrow$ $\mathbf{\Phi}^*$ ist Isometrie

$\Rightarrow$ **Φ** ist normaler Automorphismus

***EWe** von Isomerien:* +1 und -1 $\Leftrightarrow$ n gerade; det **Φ** = -1

aus E^n +1 $\Leftrightarrow$ n ungerade; det **Φ** = +1

-1 $\Leftrightarrow$ n ungerade; det **Φ** = -1

Drehung $\Leftrightarrow$ det **Φ** = +1; orientierungstreue Isometrie

---

Isometrienormalform: Vielfachheiten den EWe -1 (q); +1(p) = n-Rang(A ± λε)

oder Exponenten im char. Polynom (det(A-λε))

für alle anderen EW: $\lambda_j = \cos\omega_j + i\sin\omega_j$, dann Drehkästchen (s.u.)

Normalform: $\begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \cos\omega_i & -\sin\omega_i \\ 0 & & \sin\omega_i & \cos\omega_i \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{p - mal} \\ \text{q - mal} \\ \\ \\ \end{matrix}$

Spur A = p - q + 2$\sum_{j=1}^{r}\cos\omega_j$ $\Rightarrow$ z.B letztes unbek. cos $\left(\textit{beachte: } \sin\omega = \sqrt{1-\cos^2\omega}\right)$

& wenn A + A^T mehr Nullen (viele $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$): **Φ + Φ*** (A + A^T)betrachten:

- Vielfachheiten von ±**2** statt ±1
- bei EWen |μ| < 2 Drehkästchen (statt cos-sin-Kästchen): $\begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} & -\sqrt{1-\frac{\mu^2}{4}} \\ \sqrt{1-\frac{\mu^2}{4}} & \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$

*zugehörige **Orthonormalbasis:*** (A sei bzgl. der Basis $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ gegeben)

ONB der Eigenräume zu λ = 1 und λ = -1 bestimmen

für alle |λ| ≠ 1: wähle $v_1' \in$ Kern(A-λε) mit $\|v_1'\| = 1$

hier nur für λ_1 gezeigt $v_1' =: (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)^T$ setze: $\mathbf{e_1'} = \alpha_1e_1 + \beta_1e_2 + \gamma_1e_3 + \delta_1e_4$

$v_2' = \frac{1}{\sin\omega}(\Phi(v_1') - \cos\omega \cdot v_1')$ (ω zu λ aus Normalform von oben!)

$v_2' =: (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)^T$ setze: $\mathbf{e_2'} = \alpha_2e_1 + \beta_2e_2 + \gamma_2e_3 + \delta_2e_4$

(d.h. es muß immer gelten: $\boxed{\Phi(v1') = \cos\omega \cdot v_1' + \sin\omega \cdot v_2'}$ (v_1',v_2' ONB!) – kann auch „geraten“ und nachgeprüft werden)

$\Rightarrow$ ONB B' = $\{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$

& für T = (v_1' v_2' v_3' v_4') gilt: A' = T^TAT (A' ist die Normalform)

***Affiner Raum** A:* A ≠ ∅; f: A × A → V: $f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$

A = {X | $\overrightarrow{PX} \in$ V} • ∀ P ∈ A ∀ x ∈ V $\boxed{\exists_1 Q \in A\text{: } \overrightarrow{PQ} = x}$

• ∀ P, Q, R ∈ A: $\boxed{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}}$

es gilt: $\overrightarrow{QR}$ = o $\Leftrightarrow$ Q = R; $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{RQ}$ Dimension = dim des VR (V)

---

affiner Unterraum B: B = {X | $\overrightarrow{PX}$ ∈ U}, U ist UVR von V, P ∈ A

also für ein P∈B: U = { $\overrightarrow{PX}$ | $X \in$ B} zeigen: U ≠ ∅ (z.B. 0 ∈ U) ✎oder einzeln (s.o)

∀ a,b ∈ U ∀ λ,μ ∈ S: λa + μb ∈ U

$B_1 \cap B_2$ hat UVR: $U_1 \cap U_2$; B_1+B_2 hat UVR: $U_1+U_2+[\overrightarrow{PQ}]$, P∈$B_1$, Q∈$B_2$ (falls $B_1 \cap B_2 \neq 0$) **sonst:** U_1+U_2

Parameterdarstellung *(1. Art):* $x = p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$; $p = \overrightarrow{OP}$, $P \in$ B(=dargest. aff.UR) b_i Basisv.

Parameterdarstellung *(2. Art):* $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$; $p = \overrightarrow{OP_i}$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ (auch negative λ_i mögl.)

Bsp.: Gerade: $x = (1 - \mu)a + \mu b$ a,b zwei bel Pkte von Gerade

affines Koordinatensystem: $(O; b_1, ..., b_n)$ Ursprung O, Basis b_i von V^n

jedes X darstellbar als $\overrightarrow{OX} = x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, λ_i sind *Koordinaten*

aff. URe B, B' sind ***parallel*** $\Leftrightarrow$ $U \subset U'$ oder $U' \subset U$

Spektralsatz, S.v. ***Desargues***, S.v. ***Pappus***, kleiner Satz v. Pappus, S.v. ***Menelaos***
(siehe Handgeschriebenes hinten sowie Skript S. 271 ff)

affine Hülle: $[M] = \bigcap_{B \in C} B$, wobei $M \subset A$, $C = \{B \mid M \subset B\}$

Verbindungsraum: $B_1 + B_2 = [B_1 \cup B_2]$

k+1 Punkte (von A) sind ***affin unabhängig*** (**in allgemeiner Lage**)

$\Leftrightarrow$ sie liegen nicht in einem k-1-dimensionalen aff. UR von (3 nicht auf Gerade...usw.)

Lösungsmenge (Rang r) eines lösb. **LGS** kann als **affiner UR** $\boldsymbol{B^{n-r}}$ afgefaßt werden(und umgek.)

affine Abbildung $\boldsymbol{\varphi}$: $A^n \to B^p$: $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{RT} \Rightarrow \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \lambda \overrightarrow{\varphi(R)\varphi(T)}$

$\exists_1$ lin Abb. $\boldsymbol{\Phi}$: $\boldsymbol{\Phi}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$ (Bild und Urbild von $\boldsymbol{\Phi}$ geg. $\Rightarrow \exists_1$ affine Abb. φ)

<u>Eigenschaften:</u> **aff. URe gehen in aff. URe** über; **geradentreu**, **parallelentreu**, **teilverh.-treu**

Affinität(= affine Selbstabb.), wennn A = B $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\Phi}$ Automorphismus

allg. Form d. Affinität: $x' = a + \lambda x$; für $\lambda = 1$ <u>Translation</u>,

sonst <u>Streckung</u> mit Zentrum / Fixpunkt $z = \frac{1}{1-\lambda} a$

Translation τ: $\overrightarrow{P\tau(P)} = v$ (v Translationsvek.) ***Streckung*** σ: $\overrightarrow{O\sigma(P)} = \gamma \overrightarrow{OP}$ (γ Str.-faktor)

Projektion: $\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}$ (Idempotenz) $V^n = W \oplus$ Kern $\boldsymbol{\Phi}$ (W unveränd.) Kern $\boldsymbol{\Phi}$: Proj.-richtung

Koordinatendarstellung: $\vec{y} = \vec{a} + A\vec{x}$; $\vec{a}$ fest

bei Koordinatendarstellung φ: $\vec{y} = \vec{a} + A\vec{x}$ (LA II Aufg. 39)

Fixpunkte	LGS: $(A-\varepsilon \mid -\vec{a})$ lösen
Fixrichtungen	lineare Hülle der Eigenvektoren z.B. $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3]$,...(Untervektorraum)
Fixgeraden	g: $\vec{x} = \vec{p} + \mu \vec{v}$, v Fixrichtung; es muß gelten: $\exists\ \eta$: $(A-\varepsilon)\vec{p} = -\vec{a} + \eta \vec{v}$ also LGS: $(A-\varepsilon \mid -\vec{a} \mid \vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3)$ herausfinden für welche $\vec{v}$ und η lösbar $\Rightarrow$ $\vec{p}$ (für Geradengleichung, je eine Lsg. reicht)
Fixebenen	wie Fixeraden, nur Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + \gamma \vec{u} + \mu \vec{v}$
Fixräume allgemein	Fixrichtungen (z.B. 2-dim.: $[v_1,v_2]$, $[v_1,v_3]$...) und $\exists\ P \in B$: $\varphi(P) \in B$

konvexe Hülle: $\langle M \rangle = \bigcap_{K \in \mathrm{K}} K$, wobei $M \subset A^n$, $\mathrm{K} = \{K \mid K \supset M, K \text{ konvex}\}$

Lot und Abstand LGS aus $\langle l_1 - l_2, a_i \rangle = 0$; $\langle l_1 - l_2, b_i \rangle = 0 \Rightarrow$ Koefizienten λ_i, μ_i (*einsetzen!*)

$\Rightarrow$ l_1, l_2 (<u>Lotfußpunkte</u>) und Abstand = $\|l_1 - l_2\|$ a_i, b_i sind Richtungsvektoren v. l_1 bzw. l_2

& <u>*oder*</u>: LGS: Ax = 0 mit $A^T = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ (Vektoren in Zeilen!)

$\Rightarrow$ mit Gauß Lsg = c =„Lotvektor" und $d = \frac{|\langle c, A-B \rangle|}{\|c\|}$

mit diese Methode erhält man keine Lotfußpunkte

($A, B \in U_1, U_2$ - Vektoren aus den Parameterdarst)

Bewegung: affine Abbildung mit: zugehörige lin. Abb. ist <u>Isometrie</u>

$\Leftrightarrow$ Selbstabbildung, φ läßt die Abstände invariant

Ähnlichkeitsabbildung: Abstände werden um Faktor γ gestreckt

(ist in E^n Affinität und Streckung $\circ$ Bewegung)

Schlaues am Schluß:

Eigenräume von $\mathbf{\Phi}$ sind $\mathbf{\Phi}$-invariant (Rep 2, 122)

$a = \bar{a} \Rightarrow a \in R$

Cramer-Regel: Cr.-System mit det $\neq 0$: $\exists_1$ Lsg.: $\xi_k = \frac{D_k}{D}$, D=det A; D_k:k-te Sp. durch a ers.

unklar:

ges T mit $T^{-1}AT = B$ (vergl. auch Aufg. I 42)

(Kapitel 22 (Spate etc.)???

Tipp-Reste:

dann $\cos\omega = \frac{\mu}{2}$ und $\sin\omega = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}} \Rightarrow$

(wenn dim U_1 = dim U_2)