Lineare Algebra I-Zusammenfassung

Lars Hoffmann
Alexander Sung

Dies ist der Versuch einer Zusammenfassung von den klausurrelevanten Themen des ersten Semesters Lineare Algebra. Sie orientiert sich an der Struktur der Klausuren und ist nicht als Nachschlagewerk gedacht. An manchen Stellen wird von gewissen Vorkenntnissen ausgegangen.

Es sei auch darauf hingewiesen, dass dieses Dokument nur den allgemeinen Aufbau der Klausuren widergibt. Einzelne Klausuren können in den Teilaufgaben durchaus hiervon abweichen.

Die Literaturverweise beziehen sich auf:

- das Skript von Dr. V. Drumm, Prof. W. Weil (DW)
- das Skript von Prof. H. Kunle, Prof. G. Aumann, Dr. U. Schober
  (für die Hörer von Prof. Leuzinger bzw. Dr. Spitzmüller) (LS)
- die Übungsblätter vom WS'99 und SS'00 (Üb)

Besonderer Dank für Hilfe rund um TeX geht an Manuel Kauers.

Aufgabe 1

Definitionen und Sätze

- **Abbildungen** Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

  f heißt *injektiv*, wenn aus $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ folgt, daß $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist. f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g_1 : B \to A$ mit $g_1 \circ f = \mathrm{id}_A$ existiert.

  f heißt *surjektiv*, falls $f(A) = B$ gilt. f ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $g_2 : B \to A$ mit $f \circ g_2 = \mathrm{id}_B$ existiert.

  f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist. f ist genau dann bijektiv, wenn Abbildungen g_1 und g_2 existieren.

  Sei $f : A \to B$ eine Abbildung, $C \subset B$. Dann bezeichnet $f^{-1}(C)$ das *Urbild* der Menge C, das heißt $f^{-1}(C) \subset A$. f^{-1} hingegen bezeichnet die *Umkehrabbildung* von f, falls diese existiert.

DW	LS	Üb
S.18 bis S.23	S.11 bis S.14	I-1

- **Äquivalenzrelationen** Eine Relation $\sim$ heißt *Äquivalenzrelation* auf einer Menge A, falls gilt:

  1. (Reflexivität) $\forall x \in A : x \sim x$.
  2. (Symmetrie) $\forall x, y \in A : x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
  3. (Transitivität) $\forall x, y, z \in A : (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

  $[x] := \{y \in A |\, x \sim y\}$ heißt die *Äquivalenzklasse* von x.

  $[x] \neq \emptyset$ für alle $x \in A$. $([x] \neq [y]) \Rightarrow ([x] \cap [y] = \emptyset)$. $\bigcup_{x \in A} [x] = A$. Man sagt auch $\{[x] |\, x \in A\}$ bildet eine *Partition* von A.

DW	LS	Üb
S.26 bis S.28	S.18 bis S.20	I-2

- **Gruppen** Eine *Gruppe* ist ein Verknüpfungsgebilde $(A, \circ)$ mit folgenden Eigenschaften:

  1. (Assoziativität) $\forall a, b, c \in A : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
  2. (Neutrales Element) $\exists e \in A \quad \forall a \in A : e \circ a = a \circ e = a$.
     Es existiert genau ein neutrales Element.
  3. (Inverses Element) $\forall a \in A \quad \exists a^{-1} \in V : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.
     Das inverse Element ist eindeutig.

  Gilt zusätzlich $\forall a, b \in A : a \circ b = b \circ a$, so heißt die Gruppe *kommutativ* oder *abelsch*.

  In einer *multiplikativ* geschriebenen Gruppe heißt das neutrale Element 1, in einer *additiv* geschriebenen 0.

  In einer Gruppe $(A, \circ)$ sind die Gleichungen $a \circ x = b$ bzw. $x \circ a = b$ eindeutig lösbar. Das bedeutet für endliche Gruppen, daß in jeder Zeile bzw. Spalte der Gruppentafel jedes Element genau einmal vorkommt.

  Seien $(A, \circ)$ und $(B, *)$ Gruppen. Eine Abbildung $f : A \to B$ mit der Eigenschaft

  $$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1 \circ a_2) = f(a_1) * f(a_2)$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*. Ist f bijektiv, so spricht man von einem *Gruppenisomorphismus.*

Sei $(A, \circ)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $U \subset A$ ist genau dann eine Untergruppe bzgl. $\circ$, falls

1. (U1) $U \neq \emptyset$
2. (U2) $\forall a, b \in U : a \circ b^{-1} \in U$

gelten.

DW	LS	Üb
Kapitel 1, §2	Kapitel 3	I-3, I-4

- **Ringe, Körper** Ein Ring ist ein Verknüpfungsgebilde $(R, +, \cdot)$ mit folgenden Eigenschaften:

  1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
  2. $(R, \cdot)$ ist assoziativ.
  3. $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$. (Distributivgesetze)

  Ist $\cdot$ kommutativ, so heißt $(R, +, \cdot)$ *kommutativer* Ring. Besitzt $\cdot$ ein neutrales Element, so heißt $(R, +, \cdot)$ *Ring mit* 1.

  Ein Ring $(R, +, \cdot)$, für den $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, heißt *Körper*.

DW	LS	Üb
Kapitel 1, §3 und §4	Kapitel 3	I-4

Hinweise

- Äquivalenzklassen können auch mit $[x]_\sim$ oder $\widetilde{x}$ bezeichnet werden.
- Sei $(A, \circ)$ eine Gruppe. Dann gilt: $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$. Nützlich beim Nachweisen der Kommutativität.

  Die symmetrische Gruppe S_3 ist ein gutes Beispiel für eine nicht-abelsche Gruppe.

  Man sollte sich immer klarmachen, wie im konkreten Fall das neutrale bzw. inverse Element aussieht.
- Die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen bildet einen Ring mit 1.

  Die Polynome über einem Körper bilden einen kommutativen Ring mit 1.
- Körper werden auch mit S bezeichnet.

Aufgabe 2

Definitionen und Sätze

- **Vektorräume** Sei $\mathbf{K}$ ein Körper. Ein *Vektorraum* über dem Körper $\mathbf{K}$ ist eine Menge V mit zwei Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbf{K} \times V \to V$, wobei folgende Gesetze gelten:

  1. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
  2. $\forall a \in \mathbf{K}, x, y \in V : a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
  3. $\forall a, b \in \mathbf{K}, x \in V : (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

4. $\forall a, b \in \mathbf{K}, x \in V : a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$
5. $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$.

Eine Teilmenge U eines Vektorraumes V ist genau dann ein *Untervektorraum* (UVR) von V, wenn

1. (U1) $U \neq \emptyset$
2. (U2) $\forall x, y \in U, a \in \mathbf{K} : x + y \in U \wedge a \cdot x \in U$

gelten. Der Schnitt von Untervektorräumen ist wieder ein Untervektorraum.

Sei $A \subset V$. Dann heißt

$$[A] := \bigcap U \quad (U \text{ Untervektorraum von } V,\ A \subset U)$$

die *lineare Hülle* von A. $[A]$ ist die Menge alle Linearkombinationen von Vektoren aus A.

DW	LS	Üb
Kapitel 2, §1	Kapitel 4, Kapitel 5	I-5, I-6

- **Summe von Untervektorräumen** Unter der *Summe* von k Teilmengen $A_1, \ldots, A_k$ eines Vektorraumes V, $k \geq 2$, verstehen wie die Menge

$$A_1 + \ldots + A_k := \{x_1 + \ldots + x_k | x_i \in A_i, i = 1 \ldots k\}.$$

Schreibweise: $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i$.

Sind $U_1, \ldots U_k, k \geq 2$, Untervektorräume von V und gilt

$$U_i \cap \sum_{j=1}^{k} U_j = \{o\} \quad (i = 1 \ldots k, j \neq i),$$

so heißt die Summe $U_1 + \ldots + U_k$ *direkt*. In diesem Fall schreibt man $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Die Summe $U = U_1 + \ldots + U_k$ ist genau dann direkt, wenn jeder Vektor $x \in U$ eine eindeutige Darstellung $x = x_1 + \ldots + x_k$ mit $x_i \in U_i$ $(i = 1 \ldots k)$ besitzt.

Dimensionssatz Es seien V ein Vektorraum und U, W Untervektorräume von V. Dann gilt:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

DW	LS	Üb
S.119f	S.54 bis S.56	I-7, I-8

- **Lineare Abhängigkeit** Die Vektoren $x_1, \ldots, x_p \in V$ heißen *linear abhängig*, wenn es $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K}$ gibt, die nicht alle Null sind, so daß $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i \cdot x_i = o$ ist. Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ heißen *linear unabhängig*, wenn sie nicht linear abhängig sind.

DW	LS	Üb
Kapitel 2, §2	S.56 bis S. 60	I-8

- **Lineare Abbildungen** V, W seien $\mathbf{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \to W$ heißt *linear*, wenn für alle $x, y \in V$, $a, b \in K$ gilt:

1. $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$
2. $\Phi(a \cdot x) = a \cdot \Phi(x)$.

Beide Bedingungen lassen sich zu $\Phi(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \Phi(x) + b \cdot \Phi(y)$ zusammenfassen.

Bei einer linearen Abbildungen $\Phi : V \to W$ geht der Nullvektor $o \in V$ in den Nullvektor $o' \in W$ über. Linear abhängige Vektoren bleiben linear abhängig. Φ ist genau dann injektiv, wenn linear unabhängige Vektoren linear unabhängig bleiben.

Gilt zusätzlich $\dim V = \dim W = n$ (!) , so sind

1. Φ ist bijektiv
2. Φ ist surjektiv
3. Φ ist injektiv

äquivalente Aussagen. Zwei *endlich* dimensionale Vektorräume über demselben Körper sind also genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Sei $\Phi : V \to W$ linear, $o \in V, o' \in W$ die Nullvektoren. $\operatorname{Kern} \Phi := \{x \in V \,|\, \Phi(x) = o'\}$.

$\operatorname{Kern} \Phi$ ist ein Untervektorraum von V. Es gilt $\operatorname{Kern} \Phi = \{o\}$ genau dann, wenn Φ injektiv ist.

Die Bildmenge $\operatorname{Bild} \Phi := \Phi(V)$ ist ein Untervektorraum von W.

Dimensionssatz für lineare Abbildungen Es seien V, W Vektorräume und $\Phi : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\dim(\operatorname{Kern} \Phi) + \dim(\operatorname{Bild} \Phi) = \dim V.$$

Eine lineare Abbildung $\Pi : V \to V$ mit $\Pi^2(x) = \Pi(x)$ heißt Projektion. Ist $\Pi : V \to V$ eine Projektion, so gilt $V = \operatorname{Kern} \Pi \oplus \operatorname{Bild} \Pi$. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

DW	LS	Üb
Kapitel 3, §1 und §3	Kapitel 8	I-9, I-10

Hinweise

- Beim Thema „Lineare Abbildungen ⇔ Abbildungsmatrizen“ sollte man auf jeden Fall verstanden haben, wie Abbildungsmatrizen und Basen zusammenhängen. (Übungsblatt 13, Aufgabe 3)
- Die Definition der „Direkten Summe“ wird gerne abgefragt.

Aufgabe 3

Definitionen und Sätze

- **Faktorraum** Sei V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum und $U \subset V$ ein beliebiger Untervektorraum. Dann wird durch
$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in U$$
für alle $x, y \in V$ eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Definiert man für alle $x, y \in V, a \in \mathbf{K}$ folgende Verknüpfungen:
  1. $[x] + [y] := [x + y]$
  2. $a \cdot [x] := [a \cdot x]$,

so wird die Faktormenge zu einem Vektorraum, dem sogenannten Faktorraum, geschrieben $V/_U$.

Seien V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, U ein Untervektorraum. Dann gilt:

$$\dim(V/_U) + \dim U = \dim V.$$

Sei desweiteren B eine Basis von U, $B \cup B'$ eine Basis von V und $B \cap B' = \emptyset$. Dann ist

$$\{[x] | \, x \in B'\}$$

eine Basis von $V/_U$.

Man bestimmt also eine Basis des Faktorraumes $V/_U$, indem man eine Basis von U zu einer Basis von V ergänzt. Die Restklassen der ergänzten Vektoren bilden eine Basis des Faktorraumes.

Gilt für zwei UVRe U, W von V: $V = U \oplus W$, so nennt man U und W zu einander *komplementär*. $[B']$ (lineare Hülle) ist also der Komplementärraum zu $U = [B]$.

Seien V, W Vektorräume und $\Phi : V \to W$ linear. Dann ist $V/_{\text{Kern}\,\Phi} \cong \text{Bild}\,\Phi$. Seien $x_1, \ldots, x_p \in V$. Die Restklassen $x_i + \text{Kern}\,\Phi := [x_i]$ $(i = 1, \ldots, p)$ sind also genau dann linear abhängig, wenn die Vektoren $\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_p)$ linear abhängig sind.

DW	LS	Üb
S.121 bis S.125	S.87 bis S.89	I-11

- **Untervektorraum $\rightarrow$ Lineares Gleichungssystem** Aufgabe: Bestimme ein LGS, dessen Lösungsraum der Untervektorraum $U := [x_1, \ldots, x_p]$ ist.

  1. Löse das homogene Gleichungssystem

  $$\left(\begin{array}{c|c} x_1^\top & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_p^\top & 0 \end{array}\right)$$

  2. Die Lösungsmenge sei $[y_1, \ldots, y_q]$.
  3. U ist dann Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems

  $$\left(\begin{array}{c|c} y_1^\top & 0 \\ \vdots & \vdots \\ y_q^\top & 0 \end{array}\right)$$

  4. Liegt ein affiner Untervektorraum der Form $U' = a + [x_1, \ldots, x_p]$, so ist U' Lösung des inhomogenen LGS

  $$\left(\begin{array}{c|c} y_1^\top & r_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_q^\top & r_q \end{array}\right),$$

  wobei $r_i := y_i^\top \cdot a$ $(i = 1, \ldots, q)$ ist.

DW	LS	Üb
S.116 bis S.118	Tutorium 11	

- **Beispiel** (entnommen Tutorium 11)
Es seien $V := \mathbb{R}^4$, $U := [(0,1,-2,-2),(1,-1,1,-1)]$, $a := (0,1,0,0)$ und $[a] \in V/U$ die Klasse von a. Bestimmen Sie ein LGS, dessen Lösungsmenge gleich $[a]$ ist.

  1. Löse das folgendes LGS:
$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ & & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \end{array}$$

  2. $$\mathbf{L} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

  3. U ist also Lösungsraum des LGS
$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

  4. Als inhomogenes LGS, dessen Lösungsmenge $[a]$ ist, ergibt sich daraus
$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

- **Summe und Schnitt von Untervektorräumen** Seien $U := [x_1, \ldots, x_p]$ und $W := [y_1, \ldots, y_q]$ Untervektorräume von V. Eine Basis von $U + W$ bzw. $U \cap W$ bestimmt man durch Lösen des Gleichungssystems
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} x_1 & \ldots & x_p & y_1 & \ldots & y_q & 0 \end{array} \right)$$
Bringt man diese Matrix auf Gaußsche Normalform, so stehen in den Spalten, in denen die 1er auftauchen, die Basisvektoren der Summe $U + W$. Die Lösungsmenge des LGS' liefert die Basisvektoren des Schnittes, denn jeder Vektor $z \in U \cap W$ besitzt je eine eindeutige Darstellung $z = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_q y_q$ in U bzw. in W. Der Vektor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q)$ gehört zum Lösungsraum des LGS'.
WS '99/'00: Übungsblatt 9, 10

- **Beispiel** (entnommen Tutorium 8)
Im $\mathbb{R}^4$ seien folgende UVR gegeben:
$$U := [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}]; \qquad W := [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}]$$
Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$ und $U \cap W$.

1. Manchmal ist es aus rechentechnischen Gründen besser, die Basen der Untervektorräume zu vereinfachen.

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}$$

2. Also ist

$$U = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]; \qquad W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

3. Jetzt löst folgendes LGS.

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
 & & & & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \\
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{-1} &
\end{array}$$

4. Durch die Gaußsche Normalform sieht man (Übungsblatt 10, Aufgabe 4), daß die ersten vier Spalten linear unabhängig sind. Damit ist $U + W = \mathbb{R}^4$.

5. Die Lösungsmenge des LGS ist

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}]$$

Aus dem Ansatz ergeben sich die zwei folgenden Vektoren für den Schnitt:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Hinweise

- Aufgabe 3 ist meistens eine Rechenaufgabe; die beste (und vielleicht auch einzige) Möglichkeit hier Punkte zu sammeln, ist Üben, Üben, Üben. Vor allem beim Ausrechnen der Basen von Schnitt/Summe/Faktorraum von zwei Untervektorräumen kann man sich einiges an Arbeit ersparen.

Aufgabe 4

Definitionen und Sätze

- **Vektorraum Hom**(V, W) Es seien V, W Vektorräume über dem Körper $\mathbf{K}$, und $\mathrm{Hom}(V, W)$ sei die Menge aller linearen Abbildungen von V in W.

  Es seien $\Phi, \Psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbf{K}$. Mit der folgenden Addition und $\mathbf{K}$-Multiplikation

$$\Phi + \Psi : \begin{cases} V & \to & W \\ x & \mapsto & (\Phi + \Psi)(x) := \Phi(x) + \Psi(x) \end{cases}$$

$$\lambda\Phi : \begin{cases} V & \to & W \\ x & \mapsto & (\lambda\Phi)(x) := \lambda\Phi(x) \end{cases}$$

ist $\mathrm{Hom}(V,W)$ ein **K**-Vektorraum.

Sind V und W endlichdimensional, dann gilt

$$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W.$$

Der **K**-Vektorraum $\mathrm{Hom}(V,W)$ ist isomorph zum **K**-Vektorraum der (m,n)-Matrizen, wobei $m = \dim W$ und $n = \dim V$ ist.

DW	LS	Üb
S.140 bis S.142	S.113, S.114	

- **Dualraum** Sei V ein Vektorraum über **K**.

  Der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V,\mathbf{K})$ aller linearen Abbildungen von V in den Skalarkörper **K** heißt *Dualraum* V^* von V. Seine Elemente, nämlich die linearen Abbildungen $\Phi : V \to \mathbf{K}$, heißen *Linearformen* auf V.

  Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $(b_1,\ldots,b_n)$ eine Basis von V. Die durch

  $$\Phi_i(b_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,\ldots,n$$

  festgelegte Basis $(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ von V^* heißt die zur Basis $(b_1,\ldots,b_n)$ gehörige *Dualbasis* von V^*.

DW	LS	Üb
S.142ff	S.116	I-12

Hinweise

- Es seien V n-dimensional und $x \in V$ und $\Phi \in V^*$ beliebig. Sie haben die Darstellung

  $$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \Phi_i, \qquad x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \; b_j, \qquad \alpha_k, \xi_k \in \mathbf{K},\; k = 1,\ldots,n.$$

  Daraus ergibt sich

  $$\Phi(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \Phi_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \; b_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \; \xi_j \; \Phi_i(b_j)$$
  $$= \alpha_1 \; \xi_1 + \alpha_2 \; \xi_2 + \cdots + \alpha_n \; \xi_n.$$

  Also läßt sich $\Phi(x)$ auch durch die Multiplikation der Koordinatenvektoren von x und einem geeignetem Vektor $a \in V$ darstellen:

  $$\Phi(x) = \hat{a}^\top \; \hat{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

- Der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V,W)$ aller linearen Abbildungen von V in W wird auch mit $L(V,W)$ bezeichnet.

Beispiel

- Klausuraufgabe vom Herbst '93:

  Gegeben seien die n Linearformen

$$\Phi_k : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_k - x_{k+1} \end{array} \right. \qquad (k = 1, \ldots, n-1),$$

$$\Phi_n : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_n \end{array} \right. .$$

  Zeige, dass $B^* = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ eine Basis des Dualraumes $(\mathbb{R}^n)^*$ ist, und gib eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$ an, so dass B^* die Dualbasis zu B ist.

  Lösung:

  Teil 1: Die Vektoren der Standardbasis $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ des $(\mathbb{R}^n)^*$ sehen so aus:

$$e_k^* : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_k \end{array} \right. \qquad (k = 1, \ldots, n-1).$$

  Bezüglich dieser Basis lassen sich daher die Φ_k durch $\Phi_k = e_k^* - e_{k+1}^*$ für $k = 1, \ldots, n-1$ und $\Phi_n = e_n^*$ darstellen. Der Koordinatenvektor $\hat{\Phi}_k$ von Φ_k ist somit

$$\hat{\Phi}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-te} \\ \quad \text{Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \quad \text{bzw.} \quad \hat{\Phi}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Da die Koordinatenvektoren linear unabhängig sind, ist B^* linear unabhängig.
  Wegen $|B^*| = \dim(\mathbb{R}^n)^*$ ist B^* Basis.

  Teil 2: Gesucht ist nun eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ des $\mathbb{R}^n$ mit $\Phi_i(b_j) = \delta_{ij}$. Bezüglich der Standardbasen heißt das $\hat{\Phi}_i^\top \ \hat{b}_j = \hat{\Phi}_i^\top \ b_j = \delta_{ij}$. Man beachte dabei, dass der Koordinatenvektor $\hat{b}$ eines Vektors $b \in \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasis stets gleich b ist.

  In Matrizen geschrieben erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} b_1 & \cdots & b_n \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und durch Invertieren der linken Matrix

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; b_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Übrigens zeigt gemäß Definition Teil 2 auch Teil 1, denn zur Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ des $\mathbb{R}^n$ erfüllt $B^* = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ die Beziehung $\Phi_i(b_j) = \delta_{ij}$. Damit ist B^* eine Basis des $(\mathbb{R}^n)^*$.

Oftmals ist die Klausuraufgabe zum Dualraum nicht mehr als eine Rechenaufgabe. Das Wichtigste dabei ist, sich nicht verwirren zu lassen und mit Hilfe der Definition einen Ansatz zu finden.

Aufgabe 5

Definitionen und Sätze

- **Allgemeine lineare Gruppe** Die Menge der regulären (n, n)-Matrizen ist bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Sie heißt *allgemeine lineare Gruppe* (über $\mathbf{K}$).

  Die Menge aller Automorphismen, also aller bijektiven linearen Selbstabbildungen, des n-dimensionalen Vektorraums V über $\mathbf{K}$ ist bezüglich der Verkettung eine Gruppe, genannt *Automorphismengruppe*.

  Eine lineare Selbstabbildung Φ von V ist genau dann bijektiv, wenn die Abbildungsmatrix vollen Rang hat, d.h. $\text{Rang}\, \Phi = \dim V$.

DW	LS	Üb
S.59, S.60	S.125	

- **Spur** Sei $A = (\alpha_{ij})$ eine (n, n)-Matrix.

  Die Summe der Hauptdiagonalelemente heißt die *Spur* von A, geschrieben

  $$\text{Spur}\, A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk}.$$

  Sind A, B zwei (n, n)-Matrizen, so gilt $\text{Spur}\, AB = \text{Spur}\, BA$.

  Sind A und $\bar{A}$ ähnliche Matrizen, so gilt $\text{Spur}\, A = \text{Spur}\, \bar{A}$.

  Da die Abbildungsmatrizen einer Abbildung zu verschiedenen Basen ähnlich sind, verstehen wir unter der *Spur eines Endomorphismus* Φ eines endlichdimensionalen Vektorraums die Spur irgend einer Abbildungsmatrix von Φ.

DW	LS	Üb
(S.142)	S.129, S.130	

- **Eigenwert und Eigenvektor** Φ sei ein Endomorphismus eines $\mathbf{K}$-Vektorraums V.

  Wenn es ein $x \in V, x \neq o$, und ein $\lambda \in \mathbf{K}$ gibt, so dass

  $$\Phi(x) = \lambda\, x$$

gilt, dann heißt λ *Eigenwert* (EW) von Φ, und x heißt *Eigenvektor* (EV) von Φ zum Eigenwert λ.

Die Menge aller Eigenvektoren von Φ zu einem festen Eigenwert λ bildet zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum E_λ von V. Er heißt der zu λ gehörige *Eigenraum* von Φ. Es ist $E_\lambda = \mathrm{Kern}\,(\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$.

Die Menge aller Eigenwerte von Φ heißt das *Spektrum* von Φ, geschrieben $\mathrm{Spec}\,\Phi$.

$\lambda \in \mathbf{K}$ ist ein Eigenwert von Φ genau dann, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms von Φ ist, und genau dann, wenn λ Nullstelle des Minimalpolynoms von Φ ist.

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von Φ mit den zugehörigen Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_k$, so sind $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.

Φ ist genau dann injektiv, wenn 0 nicht Eigenwert von Φ ist.

Φ ist genau dann eine Projektion, wenn V direkte Summe der Eigenräume zu den Eigenwerten 0 und 1 ist, also $V = E_0 \oplus E_1$.

DW	LS	Üb
S.175 bis S.179	S.137 bis S.140	I-15, II-1, II-2

- **Diagonalisierbarkeit** Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum.

  Ein Endomorphismus Φ von V heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich der die Abbildungsmatrix von Φ Diagonalgestalt hat.

  Für einen Endomorphismus $\Phi : V \to V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

  1. Φ ist diagonalisierbar.
  2. In V gibt es eine Basis aus Eigenvektoren von Φ.
  3. V ist die direkte Summe der Eigenräume von Φ.
  4. Die Summe der Dimensionen der Eigenräume von Φ ist n.

DW	LS	Üb
S.179 bis S.182	S.141 bis S.144	II-1, II-2

Hinweise

- Die Schreibweisen sind zum Teil sehr unterschiedlich. Mit $GL(n, \mathbf{K})$ bzw. $GS^{(n,n)}$ wird die Menge der regulären (n,n)-Matrizen bezeichnet. Für die Automorphismengruppe verwendet man $\mathrm{Aut}(V)$ und $GL(V)$.

  Diese Gruppen sind für $n \geq 2$ nicht kommutativ.

- Da eine Matrix $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ die lineare Abbildung $\Phi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n, x \mapsto A \cdot x$, festlegt, kann in analoger Weise über Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräumen quadratischer Matrizen gesprochen werden.

- Die Definitionen von Eigenwert und Eigenvektor werden immer mal wieder abgefragt.

Beispiel

- Klausuraufgabe vom Frühjahr '98:

  Es seien V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K}$ und Φ, Π Endomorphismen von V. Es gelte $\Pi^2 = \Pi$. Weiter sei x ein Eigenvektor von $\Pi \circ \Phi$ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$. Zeige:

(a) $x \in \text{Bild}\,\Pi$
(b) $\Phi(x) - \lambda x \in \text{Kern}\,\Pi$
(c) Ist x außerdem Eigenvektor von Φ zu einem Eigenwert μ, so gilt $\lambda = \mu$.

Lösung:

(a) x ist Eigenvektor von $\Pi \circ \Phi$ zum Eigenwert $\lambda \neq 0 \Rightarrow \Pi \circ \Phi(x) = \lambda x$
$\Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}\Pi(\Phi(x)) = \Pi(\frac{1}{\lambda}\Phi(x))$, also gilt $x \in \text{Bild}\,\Pi$.

(b) $\Pi(\Phi(x) - \lambda x) = \Pi(\Phi(x)) - \Pi(\lambda x) = \lambda x - \lambda\Pi(x)$.
Wegen $\lambda \neq 0$ müsste nun $\Pi(x) = x$ sein. Nach (a) gilt: $\exists v \in V : \Pi(v) = x$
$\Rightarrow \Pi(x) = \Pi(\Pi(v)) = \Pi^2(v) = \Pi(v) = x. \quad (*)$
Also ist $\Pi(\Phi(x) - \lambda x) = o$, d.h. $\Phi(x) - \lambda x \in \text{Kern}\,\Pi$.

(c) Sei außerdem x Eigenvektor von Φ zum Eigenwert μ, somit also $\Phi(x) = \mu x$.
$\Rightarrow \lambda x = \Pi \circ \Phi(x) = \Pi(\Phi(x)) = \Pi(\mu x) = \mu\Pi(x) = \mu x$ (nach $(*)$).
Da x Eigenvektor ist, ist $x \neq o$. Somit ergibt sich $\lambda = \mu$.

Aufgabe 6

Definitionen und Sätze

- **Determinante** Sei $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix.

$$\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)}\, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

heißt *Determinante der Matrix* A.

Die Addition eines Vielfachen einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen ändert die Determinante nicht.
Die Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit $\lambda \in \mathbf{K}$ vervielfacht die Determinante um den Faktor λ.
Das Vertauschen von Zeilen bzw. Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.

A ist genau dann regulär, wenn $\det A$ von Null verschieden ist.

Transpositionssatz Für eine (n,n)-Matrix gilt $\det A = \det A^\top$.

Produktsatz Für zwei (n,n)-Matrizen A, B gilt $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Ist die Matrix A regulär, so gilt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Ähnliche Matrizen besitzen dieselbe Determinante, denn sind A und $\bar{A}$ ähnlich, so existiert eine reguläre Matrix $T \in \mathbf{K}^{n \times n}$ mit $\bar{A} = T^{-1}\,A\,T$ und damit gilt $\det \bar{A} = \det(T^{-1}\,A\,T) = \det(T^{-1}) \cdot \det A \cdot \det T = (\det T)^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$.

Sind V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\Phi \in \text{End}(V)$, so haben alle Abbildungsmatrizen von Φ folglich dieselbe Determinante. Daher setzt man $\det \Phi := \det A_\Phi$ und nennt dies die *Determinante der linearen Abbildung* Φ.

DW	LS	Üb
S.164 bis S.173	S.171 bis S.177	I-14, I-15

- **Entwicklung** Es sei $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$. Für $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ wird mit A_{ij} diejenige Matrix bezeichnet, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

  Sei nun $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Dann gilt:

$$\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile:} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, \det A_{ik}$$

$$\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte:} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{kj}\, \det A_{kj}$$

DW	LS	Üb
S.169, S.170	S.177, S.178	

Hinweise

- **Fehlstand** Sei $\pi = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) \end{bmatrix} \in S_n$.

  Jedes Paar $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$ mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$ heißt ein *Fehlstand* von π. Die Anzahl $F(\pi)$ der Fehlstände von π heißt die *Fehlstandszahl* von π.

- Determinanten sind nur für quadratische Matrizen erklärt.

- Für $n = 2$ erhalten wir $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$.

  Für $n = 3$ ergibt sich die *Regel von Sarrus* :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33}.$$

  Ist A eine obere oder eine untere Dreiecksmatrix, so ist $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

- Vor der Entwicklung bietet es sich an, durch Zeilen- und Spaltenumformungen möglichst viele Nullen in einer Zeile bzw. Spalte zu erzeugen. So ist z.B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1j} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nj} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det A_{ij}.$$

- *Kästchenmultiplikationssatz* Ist A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

  und sind A, B und D quadratische Matrizen, so gilt

$$\det A = \det B \cdot \det D.$$

- Man beachte, dass die Addition einer Zeile bzw. Spalte zum λ-fachen einer anderen die Determinante um den Faktor λ vervielfacht.

- Das charakteristische Polynom p einer Matrix A ist definiert als

$$p(x) := \det(A - x \cdot E).$$

Es ist stets von der Form $p(x) = (-1)^n \, x^n + a_{n-1} \, x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{K}$. Hierbei gilt $\det A = a_0$ und $\operatorname{Spur} A = a_{n-1}$.

- Häufig kommt als letzte Klausuraufgabe des ersten Teils die Berechnung der Determinanten einer (n,n)-Matrix dran. Ziel ist es dann, durch geeignete Umformungen eine Dreiecksmatrix zu erhalten oder eine Rekursionsformel zu finden, so dass man die Determinante in Abhängigkeit von n angeben kann.

Beispiele

- Klausuraufgabe vom Herbst '96:

Berechne die Determinante der (n,n)-Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ -j & \text{für } i = j+1 \\ j-1 & \text{für } i = j-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & n-2 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -(n-2) & 1 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

Zuerst stelle man fest, dass die Spaltensumme außer bei der letzten Spalte stets 0 ist. Das nutzt man aus, indem man die erste Zeile zur zweiten addiert, dann die neue zweite Zeile zur dritten, usw.. Auf diese Weise erreicht man durch die positiven Einträge, dass die negativen auf der unteren Nebendiagonalen verschwinden. Man erhält also

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} = n!$$

Die Determinantenaufgaben sind zwar nicht immer so einfach zu lösen, das Entscheidende ist aber meist die Regelmäßigkeit der Matrix zu erkennen und auszunutzen. Beispielsweise führt eine Entwicklung oft auf eine Rekursionsformel.

- Klausuraufgabe vom Frühjahr '98:

  Berechne mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, die Determinante $D_n(x)$ der reellen (n,n)-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Man rechne zuerst einfach mal los:

$$\begin{aligned} D_1(x) &= 1+x^2 \\ D_2(x) &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4 \\ D_3(x) &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^3 - 2x^2(1+x^2) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \end{aligned}$$

Behauptung:

$$D_n(x) = 1 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$$

Beweis mittels vollständiger Induktion:

I.A.: siehe oben

I.V.: Für festes $n \geq 3$ gelte

$$D_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} \quad \text{und} \quad D_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k}.$$

I.S.:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= (1+x^2)\ D_{n-1}(x) - x \begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{durch} \\ \text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{ersten Zeile} \end{pmatrix} \\ &= (1+x^2)\ D_{n-1}(x) - x^2\ D_{n-2}(x) \quad \begin{pmatrix} \text{durch Entwicklung} \\ \text{nach der ersten Spalte} \end{pmatrix} \\ &= (1+x^2) \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} \qquad \text{(nach I.V.)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + x^2 \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}. \end{aligned}$$

Anhang

Definitionen und Bezeichnungen

Matrizen

1. Sei A eine (m,n)-Matrix.

   - Die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A und heißt der *Rang der Matrix* A.
   - A hat *vollen Rang* genau dann, wenn $\operatorname{Rang} A = \min\{m,n\}$.

2. Sei A eine (n,n)-Matrix über $\mathbf{K}$.

   - A heißt *regulär*, wenn $\operatorname{Rang} A = n$. Ist $\operatorname{Rang} A < n$, so heißt A *singulär*.
   - A heißt *invertierbar*, wenn eine Matrix A^{-1} existiert mit $A\ A^{-1} = E$ und $A^{-1}A = E$. A^{-1} heißt dann die *Inverse* von A.
     A ist invertierbar genau dann, wenn A regulär ist.
   - Gilt $A\ x = \lambda\ x$ mit $o \neq x \in \mathbf{K}^n$ für ein $\lambda \in \mathbf{K}$, so heißt λ *Eigenwert* (EW) von A, und x heißt *Eigenvektor* (EV) von A zum Eigenwert λ.
   - Die Menge $\operatorname{Spec} A$ aller Eigenwerte von A heißt das *Spektrum* von A.
   - A heißt *diagonalisierbar*, wenn A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.
   - Die Summe der Hauptdiagonalelemente heißt die *Spur* von A.
   - A heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^\top$ gilt.
     Genau dann ist A symmetrisch, wenn A zu einer Diagonalmatrix orthogonal äquivalent ist.
   - A heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $A = -A^\top$ gilt.

3. Sei A eine (n,n)-Matrix über $\mathbb{R}$.

   - A heißt *orthogonal*, wenn $A\ A^\top = E = A^\top A$ gilt.
     Dies ist gleichbedeutend mit $A^{-1} = A^\top$.

4. Sei A eine (n,n)-Matrix über $\mathbb{C}$.

   - A heißt *hermitesch*, wenn $A = \bar{A}^\top$ gilt.
   - A heißt *schiefhermitesch*, wenn $A = -\bar{A}^\top$ gilt.
   - A heißt *normal*, wenn $A\ \bar{A}^\top = \bar{A}^\top A$ gilt.
   - A heißt *unitär*, wenn $A\ \bar{A}^\top = \bar{A}^\top A = E$ gilt.
     Dies ist gleichbedeutend mit $A^{-1} = \bar{A}^\top$.

5. Sei A eine symmetrische (n,n)-Matrix über $\mathbb{R}$.

   - A heißt *positiv definit*, wenn gilt: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq o: \quad x^\top A\ x > 0$.
     Folgende Aussagen sind äquivalent:
     – A ist positiv definit.
     – Alle Eigenwerte von A sind positiv.
     – Alle Hauptunterdeterminanten von A sind positiv.

– Es existiert eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = B^\top B$.

- A heißt *negativ definit*, wenn gilt: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq o : \quad x^\top A\, x < 0.$
- A heißt *indefinit*, wenn gilt:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top A\, x > 0 \qquad \wedge \qquad \exists x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top A\, x < 0.$$

6. Seien $A, \tilde{A}$ zwei (m,n)-Matrizen über $\mathbf{K}$.
   - A und $\tilde{A}$ heißen *äquivalent*, wenn es reguläre Matrizen $S \in \mathbf{K}^{n\times n}$ und $T \in \mathbf{K}^{m\times m}$ gibt mit $\tilde{A} = T^{-1} A\, S$.
     Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbf{K}^{m\times n}$. :-)
7. Seien $A, \tilde{A}$ und A' (n,n)-Matrizen über $\mathbf{K}$.
   - A und $\tilde{A}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine reguläre Matrix $S \in \mathbf{K}^{n\times n}$ gibt mit $\tilde{A} = S^{-1} A\, S$.
     Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbf{K}^{n\times n}$.
   - A und A' heißen *orthogonal äquivalent*, wenn es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbf{K}^{n\times n}$ gibt mit $A' = S^\top A\, S$.

Lineare Abbildungen

1. Es seien V, W $\mathbf{K}$-Vektorräume.
   - Eine Abbildung $\Phi : V \to W$ heißt *linear* oder (*Vektorraum-*)*Homomorphismus*, wenn

     $$\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y)$$

     für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ gilt.
   - Eine bijektive lineare Abbildung heißt *Isomorphismus*.
     Eine lineare Abbildung $\Phi : V \to V$ heißt *Endomorphismus*.
     Eine bijektive lineare Abbildung $\Phi : V \to V$ heißt *Automorphismus*.
2. Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.
   - Zu Φ gehören die Mengen $\operatorname{Bild}\Phi := \Phi(V)$ und $\operatorname{Kern}\Phi := \Phi^{-1}(\{o\})$.
     Stets gilt $\dim V = \dim \operatorname{Kern}\Phi + \dim \operatorname{Bild}\Phi$.
   - Der *Rang* einer linearen Abbildung ist definiert als $\operatorname{Rang}\Phi := \dim \operatorname{Bild}\Phi$.
3. Seien $\Phi : V \to W$ und $\Psi : W \to V$ lineare Abbildungen über euklidischen oder unitären Vektorräumen.
   - Φ und Ψ heißen *zueinander adjungiert*, wenn $\langle \Phi(x), y\rangle_W = \langle x, \Psi(y)\rangle_V$ für alle $x \in V$ und alle $y \in W$ gilt.
     In diesem Fall heißt Ψ die *adjungierte Abbildung* von Φ und wird mit Φ^* bezeichnet.
   - Φ heißt *Isometrie*, wenn $\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_W = \langle x, y\rangle_V$ für alle $x, y \in V$ gilt.
     Φ ist genau dann Isometrie, wenn Φ^* existiert und $\Phi^* = \Phi^{-1}$ erfüllt.
     Sind V und W euklidische Vektorräume, so heißt Φ auch *orthogonale Abbildung*, sind V und W unitäre Vektorräume, so heißt Φ auch *unitäre Abbildung*.
     Isometrien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißen auch *Drehungen* des $\mathbb{R}^n$. Ist dann $\det\Phi = 1$, so spricht man von *eigentlichen Drehungen*, bei $\det\Phi = -1$ von *uneigentlichen Drehungen* oder *Drehspiegelungen*.

4. Sei $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus eines $\mathbf{K}$-Vektorraums V.
   - Gibt es ein $x \in V, x \neq o$, und ein $\lambda \in \mathbf{K}$, so dass $\Phi(x) = \lambda\, x$ gilt, dann heißt λ *Eigenwert* von Φ, und x heißt *Eigenvektor* von Φ zum Eigenwert λ.
   - Φ heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von Φ Diagonalgestalt hat.
   - Das *charakteristische Polynom* von Φ ist definiert als $p(x) := \det(\Phi - x \cdot \mathrm{id}_V)$.
   - Das *Minimalpolynom* m von Φ ist das normierte Polynom kleinsten Grades, für das $m(\Phi) = O$ (Nullabbildung) gilt.

5. Sei $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus des euklischen oder unitären $\mathbf{K}$-Vektorraums V.
   - Φ heißt *selbstadjungiert*, wenn $\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, \Phi(y) \rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt.
     Φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn Φ^* existiert und $\Phi = \Phi^*$ erfüllt ist.
   - Φ heißt *antiselbstadjungiert*, wenn $\langle \Phi(x), y \rangle = -\langle x, \Phi(y) \rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt.
     Φ ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn Φ^* existiert und $\Phi = -\Phi^*$ erfüllt ist.
   - Φ heißt *normal*, wenn Φ^* existiert und $\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$ erfüllt ist.
   - Gilt $\Phi^2 = \Phi$, so heißt Φ *Projektion* (auf $U := \mathrm{Bild}\,\Phi$).
     Φ ist genau dann eine Projektion, wenn V die direkte Summe der Eigenräume von 0 und 1 ist.
     Ist Φ Projektion und gilt $(\Phi(x) - x) \perp \Phi(x)$ für alle $x \in V$, so heißt Φ *Orthogonalprojektion*.

Lineare Abbildungen und Abbildungsmatrizen

1. Seien V, W endlichdimensionale *euklidische* oder *unitäre* Vektorräume, B und B' Orthonormalbasen von V bzw. W, und $\Phi : V \to W$ sei ein Homomorphismus.
   - Bezüglich B' und B ist die Abbildungsmatrix A_{Φ^*} von Φ^* gerade die Transponierte von A_Φ bezüglich B und B'.
   - Gilt $\dim V = \dim W$, so ist Φ genau dann eine Isometrie, wenn A_Φ bezüglich B und B' orthogonal bzw. unitär ist.

2. Seien V ein endlichdimensionaler *euklidischer* Vektorraum, $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus und A_Φ die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich einer Orthonormalbasis von V.
   - Φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn A_Φ symmetrisch ist.
   - Φ ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn A_Φ schiefsymmetrisch ist.
   - Φ ist genau dann orthogonal, wenn A_Φ orthogonal ist.
   - Φ ist genau dann normal, wenn A_Φ normal ist.

3. Seien V ein endlichdimensionaler *unitärer* Vektorraum, $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus und A_Φ die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich einer Orthonormalbasis von V.
   - Φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn A_Φ hermitesch ist.
   - Φ ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn A_Φ schiefhermitesch ist.
   - Φ ist genau dann unitär, wenn A_Φ unitär ist.
   - Φ ist genau dann normal, wenn A_Φ normal ist.