LA1-Vorlesung 08.02.2002

Satz 2:

(d) $\Delta(a_1,\dots,a_n)=0 \Leftrightarrow a_1,\dots,a_n$ l.a.

Beweis:

(d) Zuerst Spezialfall: Gilt $a_i=a_j$ für ein Paar $i\neq j$, so ist $\Delta(a_1,\dots,a_n)=0$, denn $\Delta(a_1,\dots,a_n)=\sum_{\pi\in S_n}(-1)^{F(\pi)}a_{\pi(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\pi(n),n}$

Zu π betrachte $\tilde{\pi}=\pi\circ\tau^{(i,j)} \Rightarrow (-1)^{F(\tilde{\pi})}a_{\tilde{\pi}(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\tilde{\pi}(n),n}$

$$=(-1)^{F(\pi)}(-1)^{F(\tau^{(i,j)})}\cdot a_{\pi(1),1}\cdot\ldots\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{i-te}\\ \text{Stelle}}}{a_{\pi(i),i}}\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{j-te}\\ \text{Stelle}}}{a_{\pi(j),j}}\cdot\ldots\cdot a_{\pi(n),n}$$

$$=-(-1)^{F(\pi)}\cdot a_{\pi(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\pi(n),n} \Rightarrow \underbrace{\sum_{\pi\in S_n}\ldots}_{\Delta(a_1,\dots,a_n)}=0$$

Allgemeiner Fall:

„$\Leftarrow$": Seien $a_1,\dots,a_n$ l.a. $\Rightarrow \exists$ Darst. $a_i=\sum_{j\neq i}c_j a_j$, $c_j\in K$.

$$\overset{(a)}{\Rightarrow}\Delta(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)=\underbrace{\sum_{j\neq i}c_j\underbrace{\Delta(a_1,\dots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\dots,a_n)}_{=0\text{ nach Spezialfall}}}_{=0}$$

„$\Rightarrow$": Sei $\Delta(a_1,\dots,a_n)=0$. Ang. $a_1,\dots,a_n$ l.u.

$\Rightarrow a_1,\dots,a_n$ Basis von $K^n \Rightarrow e_j=\sum_{i=1}^n x_{ij}a_i$, $j=1,\dots,n$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta(e_1,\dots,e_n)}_{=1\,(c)}=\Delta\Big(\sum_{i=1}^n x_{i1}a_i,\dots,\sum_{i=1}^n x_{in}a_i\Big)$$

$$\overset{(a)}{=}\sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_n=1}^n x_{i_1 1}\cdot\ldots\cdot x_{i_n n}\cdot\Delta(a_{i_1},\dots,a_{i_n})$$

$$=\sum_{\pi\in S_n}x_{\pi(1),1}\cdot\ldots\cdot x_{\pi(n),n}\underbrace{\Delta(a_{\pi(1)},\dots,a_{\pi(n)})}_{\overset{(b)}{=}\underbrace{\Delta(a_1,\dots,a_n)}_{\overset{(Vor.)}{=}0}\cdot(-1)^{F(\pi)}}=0 \quad ↯$$

■

Satz 3: Für $A\in K^{n\times n}$ gilt:

(a) Addieren eines Vielfachen einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile (Spalte) ändert $\det(A)$ nicht.

(b) Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit $c \in \mathbb{K}$ ergibt das c-fache von $\det(A)$.

(c) Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten) ändert das Vorzeichen von $\det(A)$.

(d) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ regulär.

Beispiele:

(a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \scriptstyle 2 \text{ rausziehen} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = \underline{\underline{6}}$$

Satz 4:

(a) Sei $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$.

$\Rightarrow \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ (Entw. nach der j-ten Spalte)

wobei $A_{ij} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A nach Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

(b) Analoge Aussage für Entwicklung nach der j-ten Zeile.

Beweis:

Spezialfall:
$$\underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn-1} & 1 \end{vmatrix}}_{= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)} b_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot b_{\pi(n)n}} = \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn-1} \end{vmatrix}}_{\overset{\pi(n)=n}{\Longrightarrow} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)} b_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot b_{\pi(n-1)\, n-1}}$$

Allg. Fall: $\det A = a_{1j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$

$+ a_{nj} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$ ▨

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{nach 2. Spalte}}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

... usw.

<u>Beispiel:</u>

(Vandermonde-Determinante) $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (x_2 - x_1) & \cdots & (x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})$

$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

<u>Satz 5:</u>

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad (A, B \in \mathbb{K}^{n \times n})$

<u>Beweis:</u>

$A \cdot B = (b_{11} \cdot a_1 + \cdots + b_{n1} a_n \mid \cdots \mid b_{1n} a_1 + \cdots + b_{nn} a_n)$

$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1 1} \cdots b_{i_n n} \cdot \det(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$

$$= \sum_{\pi \in S_n} b_{\pi(1),1} \cdots b_{\pi(n),n} \cdot \underbrace{\det(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)})}_{= (-1)^{F(\pi)} \det A} = \det A \cdot \det B.$$

☒