LA1-Vorlesung 06.02.2002

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)} a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

Andere Schreibweise: $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Eigenschaften von $F(\pi)$:

(a) $(-1)^{F(\pi)} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}$

(b) $(-1)^{F(\sigma \circ \pi)} = (-1)^{F(\sigma)} \cdot (-1)^{F(\pi)}$

Nach (a) gilt $(-1)^{F(\sigma\circ\pi)} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{j-i}$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\pi(j))-\sigma(\pi(i))}{\pi(j)-\pi(i)}}_{\prod_{1 \le \pi(i) < \pi(j) \le n} \frac{\sigma(\pi(j))-\sigma(\pi(i))}{\pi(j)-\pi(i)}}}_{\prod_{1 \le k < r \le n} \frac{\sigma(r)-\sigma(k)}{r-k}}}_{(-1)^{F(\sigma)}} \underbrace{\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}}_{=(-1)^{F(\pi)}}$$

(c) $(-1)^{F(\pi^{-1})} = (-1)^{F(\pi)}$

(d) $F(\tau^{(i,j)}) = 2(j-i)-1$

Denn: Fehlstände $\underbrace{(i,j),(i+1,j),\ldots,(j-1,j)}_{j-i}$

$\underbrace{(i,i+1),\ldots,(i,j-1)}_{j-i-1}$

Folgerung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Permutation } \pi \text{ gerade} \Leftrightarrow F(\pi) \text{ gerade} \Leftrightarrow (-1)^{F(\pi)} = 1 \\ \text{"} \quad \text{"} \text{ ungerade} \Leftrightarrow \text{"} \text{ ungerade} \Leftrightarrow \text{"} \quad = -1 \end{array}\right\} \text{Vorzeichen (Signum)}$$

Bemerkungen:

(a) $n=1$: $\det A = a_{11}$

(b) $n=2$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

(c) $n=3$: (Sarrus'sche Regel): $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$

$$\begin{array}{ccccc} \overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ \underset{-}{a_{31}} & \underset{-}{a_{32}} & \underset{-}{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 8 + 0 - 0 - 3 - 2 = 2$$

Ab $n = 4$ gilt Sarrus nicht mehr

(d) Ist A obere oder untere Dreiecksmatrix, so gilt $\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

(e) $\det E_n = 1$

Satz 1:

Es gilt $\det A^T = \det A$.

Beweis:

$A = ((a_{ij}))$, $A^T = ((\tilde{a}_{ij}))$ (mit $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$)

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)} \tilde{a}_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{\pi(n),n} = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)} a_{\pi^{-1}(\pi(1)),\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{-1}(\pi(n)),\pi(n)}$$

$$= \underbrace{\sum_{\pi \in S_n}}_{} (-1)^{F(\pi)} a_{\pi^{-1}(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{-1}(n),n}$$

kann hier auch über π^{-1} summieren, da S_n Gruppe

$$= \sum_{\pi^{-1} \in S_n} (-1)^{F(\pi^{-1})} a_{\pi^{-1}(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{-1}(n),n} = \det A$$

$\blacksquare$

Bemerkung:

Es gilt $\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)}$.

Beispiel:

$A \in \mathbb{K}^{27 \times 27} \Rightarrow 27! \cdot 26$ Produkte $\approx 2{,}8 \cdot 10^{30}$

Supercomputer: 10^{12} Multiplikationen pro Sekunde, also bräuchte er 10^{10} Jahre für die Berechnung der Determinante von A ...

$A = (a_1 \vdots \cdots \vdots a_n)$ bzw. $A = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix}$.

Setze $\Delta : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ (Determinantenfunktion)

$$\Delta(a_1,\dots,a_n) \mapsto \det(a_1,\dots,a_n)$$

(Analog: $\tilde{\Delta} : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$, $\tilde{\Delta}(b_1,\dots,b_n) \mapsto \det\begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix}$. Aber: nach Satz 1 gilt $\Delta = \tilde{\Delta}$)

Satz 2:

Es gilt:

(a) Δ ist n-fach multilinear, d.h.

$$\Delta(a_1,\dots,a_{j-1}, c\cdot a_j + d\cdot \tilde{a}_j, a_{j+1},\dots,a_n)$$
$$= c\cdot\Delta(a_1,\dots,a_j,\dots,a_n) + d\cdot\Delta(a_1,\dots,\tilde{a}_j,\dots,a_n)$$
$$\forall a_i, \tilde{a}_j \in \mathbb{K}^n,\ \forall c,d \in \mathbb{K},\ j = 1,\dots,n$$

(b) Füralle $\pi \in S_n$ gilt: $\Delta(a_{\pi(1)},\dots,a_{\pi(n)}) = (-1)^{F(\pi)}\Delta(a_1,\dots,a_n)$.

Speziell $\Delta(a_1,\dots,\underset{i\text{-te Stelle}}{a_i},\dots,\underset{j\text{-te Stelle}}{a_j},\dots,a_n) = -\Delta(a_1,\dots,\underset{i\text{-te Stelle}}{a_j},\dots,\underset{j\text{-te Stelle}}{a_i},\dots,a_n)$

(Δ ist alternierend).

(c) $\Delta(e_1,\dots,e_n) = 1$, (d.h. Δ ist normiert).

(d) $\Delta(a_1,\dots,a_n) = 0 \iff a_1,\dots,a_n$ l.a.

~~Beweis~~

Beweis:

(a) ✓

(c) ✓

(b) $\Delta(a_{\pi(1)},\dots,a_{\pi(n)}) = \sum_{\tau\in S_n} (-1)^{F(\tau)} a_{\tau(1),\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n),\pi(n)}$

Setze $\tau = \sigma \circ \pi$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{F(\sigma)} \cdot (-1)^{F(\pi)} a_{\sigma(\pi(1)),\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(\pi(n)),\pi(n)}$$

$$= (-1)^{F(\pi)} \Delta(a_1,\dots,a_n) \ \checkmark$$

(d) nächstes Mal.