LA1-Vorlesung 01.02.2002

Beispiel:

(b) Ableitungsoperator $D: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$. $V \subset \mathbb{R}[x]$, $V = [1, x, \dots, x^{n-1}]$.

$\dim V = n$, $D: V \to V$, Basis $(1, x, \dots, x^{n-1})$.

$$A_D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Basiswechsel:

V mit Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$, neue Basis $\tilde{B} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$

W mit Basis $C = (y_1, \dots, y_m)$, neue Basis $\tilde{C} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$

$$\Phi: \begin{tikzcd} \overset{B}{V} \arrow[r, "A_\Phi"] & \overset{C}{W} \arrow[d, dotted, "T^{-1}"] \\ \underset{\tilde{B}}{V} \arrow[u, "id_V", "S"'] \arrow[r, "\tilde{A}_\Phi"'] & \underset{\tilde{C}}{W} \arrow[u, bend left, "T", "id_W"'] \end{tikzcd}$$

Es gilt $\tilde{x}_j = \sum_{k=1}^{n} s_{kj} x_k$, $j = 1, \dots, n$

und $\tilde{y}_i = \sum_{\ell=1}^{m} t_{\ell i} y_\ell$, $i = 1, \dots, m$

$$S := ((s_{kj})) \in \mathbb{K}^{n \times n}, \quad T := ((t_{\ell i})) \in \mathbb{K}^{m \times m}$$

$\Rightarrow S, T$ regulär!

$$\underset{(\tilde{B},\tilde{C})}{\Phi} = \underset{(C,\tilde{C})}{id_W} \circ \underset{(B,C)}{\Phi} \circ \underset{(\tilde{B},B)}{id_V} \overset{\text{Satz 15}}{\Longrightarrow} \boxed{\tilde{A}_\Phi = T^{-1} A_\Phi S}$$

alte Basis als Komb. der neuen (T^{-1}) — neue Basis als Komb. der alten (S)

Ergebnis:

Basiswechsel ergibt neue Matrix $\tilde{A}_\Phi = T^{-1} A_\Phi S$, wo S, T den Basiswechsel in V bzw. W beschreiben (neue Basen als Kombination der alten).

Beispiel:

$\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit Standardbasen B, C.

$$\Phi: x \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{4 \times 3}} \cdot x, \quad \text{Matrix} \hat{=} A_\Phi$$

Neue Basen:

$$\tilde{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \tilde{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}_\Phi = T^{-1} A_\Phi S = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Spezialfall:</u>

$V = W$, $B = C$, $\tilde{B} = \tilde{C}$, $\Phi \in End(V)$.

$$\begin{tikzcd} \overset{B}{V} \arrow[r, "A_\Phi", "\Phi"'] & \overset{B}{V} \arrow[d, dashed, bend left, "S^{-1}"] \\ \underset{\tilde{B}}{V} \arrow[u, "S"', "id_V"] \arrow[r, "\Phi", "\tilde{A}_\Phi"'] & \underset{\tilde{B}}{V} \arrow[u, "S", "id_V"'] \end{tikzcd} \qquad \Rightarrow T = S \Rightarrow \tilde{A}_\Phi = S^{-1} A_\Phi S$$

<u>Definition:</u>

(a) Zwei Matrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißen äquivalent, wenn es reguläre $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $T \in \mathbb{K}^{m \times m}$ gibt mit $\tilde{A} = T^{-1} A S$.

(b) Zwei Matrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es ein reguläres $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit $\tilde{A} = S^{-1} A S$.

<u>Bemerkungen:</u>

(a) Äquivalenz von Matrizen $A, \tilde{A}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{m \times n}$. Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

(b) Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen geht eine Matrix A in eine äquivalente Matrix $\tilde{A}$ über.

(c) Jede Matrix ist zu ihrer GNF äquivalent.

(d) Zwei Matrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sind äquivalent $\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \tilde{A}$.

Beweis:

Nach (b) ist jede Matrix A äquivalent zu

$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r = \operatorname{Rg} A$. $\Rightarrow (\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \tilde{A} \Rightarrow A, \tilde{A}$ äquivalent$)$

Umgekehrt sei $\tilde{A} = T^{-1} A S \Rightarrow A, \tilde{A}$ sind Abbildungsm. der Abb. $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$, A bzgl. der Standardbasen,

$\tilde{A}$ bzgl. der Basen $\tilde{B} = (Se_1, \dots, Se_n)$, $\tilde{C} = (Te_1, \dots, Te_m)$.

$\Rightarrow \operatorname{Rg} A = \dim \operatorname{Bild} \Phi = \operatorname{Rg} \tilde{A}$. ∎

(e) Im $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind ähnliche Matrizen auch äquivalent, aber äquivalente Matrizen i. allg. nicht ähnlich.
Genauer: Jedes $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist äquivalent zu einer Diagonalmatrix.
Aber: Nicht jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Kapitel 4: Determinanten und Eigenwerte

§1: Determinanten

S_n symmetrische Gruppe, $\pi \in S_n$ Permutation.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(i) & \cdots & \pi(j) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Fehlstand von π ist ein Paar $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ mit $i < j$ aber $\pi(i) > \pi(j)$.

Sei $F(\pi)$ die Anzahl aller Fehlstände von π (Fehlstandszahl).

Beispiel:

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ Fehlstände: $\left.\begin{matrix} (1,2), & (2,5), & (3,5) \\ (1,5), & (3,4), & (4,5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow F(\pi) = 6$

Definition:

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. $\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{F(\pi)} a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$.