LA1-Vorlesung 30.01.2002

Abbildungsmatrix $A_\Phi = ((a_{ij})) : \Phi : V \to W$

Basen $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_m)$; $\Phi(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$.

Ausgeschrieben: $\Phi(x_j) = a_{1j} y_1 + \dots + a_{mj} y_m$

$\Rightarrow (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \Rightarrow j$-te Spalte von A_Φ.

Bemerkung:

Es gilt $\dim \text{Bild}\, \Phi = \text{Rg}\, A_\Phi$. Neue Sprechweise: Rang von Φ statt Bild Φ.

Satz 13:

V, W $\mathbb{K}$-VRe, $B := \{x_1, \dots, x_n\}$, $B' := \{y_1, \dots, y_m\}$ geordnete Basen. Dann gilt:

$$T : \text{Hom}(V, W) \to \mathbb{K}^{m \times n}$$
$$\Phi \mapsto A_\Phi$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Seien $\Phi, \Psi \in \text{Hom}(V, W)$, $a, b \in \mathbb{K}$, $A_\Phi = ((a_{ij}))$, $A_\Psi = ((b_{ij}))$.

$$A_{a\Phi + b\Psi} = ((c_{ij})) \Rightarrow (a\Phi + b\Psi)(x_j) = a\Phi(x_j) + b\Psi(x_j)$$
$$= a \sum a_{ij} y_i + b \sum_i b_{ij} y_i$$
$$= \sum_i (a a_{ij} + b b_{ij}) y_i$$

$\overset{\text{Basis}}{\Rightarrow} c_{ij} = a a_{ij} + b b_{ij} \quad \forall_{ij} \Rightarrow A_{a\Phi + b\Psi} = a A_\Phi + b A_\Psi \Rightarrow T$ linear.

T bijektiv: Sei $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Setze Φ fest durch

$\Phi(x_j) = \sum_i a_{ij} y_i$, $j = 1, \dots, n$ $\overset{\text{Satz 4}}{\Longrightarrow}$ $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ und eindeutig.

Satz 14:

Vor. wie oben, $\Phi : V \to W$ linear. Zu jedem $x \in V$, $y \in W$ seien $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$ und $\hat{y} \in \mathbb{K}^m$ die Koordinatendarstellung bezgl. B bzw. B'. Dann gilt: $\widehat{\Phi(x)} = A_\Phi \cdot \hat{x}$, $x \in V$.

Beweis:

Sei $B=(b_1,\dots,b_n)$, $B'=(c_1,\dots,c_m)$

$\Rightarrow x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$, d.h. $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x) = y_1 c_1 + \dots + y_m c_m \text{, d.h. } \widehat{\Phi(x)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \\ &\Rightarrow \Phi(x) = x_1 \Phi(b_1) + \dots + x_n \Phi(b_n) = \sum_{j=1}^n x_j \Phi(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} c_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) c_i \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j} x_j \\ \sum a_{mj} x_j \end{pmatrix} = A_\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Satz 15:

Seien V, W, X K-VR'e mit Basen B_1, B_2, B_3 und $\Phi: V \to W$, $\Psi: W \to X$ seien linear. Dann gilt $A_{\Psi\circ\Phi} = A_\Psi \cdot A_\Phi$.

Beweis:

Seien $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim X = k$;

$B_1 = (x_1,\dots,x_n)$; $B_2 = (y_1,\dots,y_m)$; $B_3 = (z_1,\dots,z_k)$.

$A_\Phi = ((a_{ij}))$, $A_\Psi = ((b_{ij}))$, $A_{\Psi\circ\Phi} = ((c_{ij}))$.

$\Rightarrow \Psi\circ\Phi(x_j) = \sum_{e=1}^k c_{ej} z_e = \Psi(\Phi(x_j)) = \Psi\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i\right)$

$= \sum_{i=1}^m a_{ij} \Psi(y_i) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \left(\sum_{e=1}^k b_{ei} z_e\right) = \sum_{e=1}^k \left(\sum_{i=1}^m b_{ei} a_{ij}\right) z_e$

$\Rightarrow c_{ej} = \sum_i b_{ei} a_{ij} \quad \forall e, j$.

Satz 16:

Seien V, W K-VR'e, Basen B, B' und sei $\Phi: V \to W$. Außerdem $\dim V = \dim W = n$.

Dann gilt: Φ Isomorphismus $\Leftrightarrow A_\Phi$ regulär.

Und: Ist Φ Isomorphismus, so gilt $A_{\Phi^{-1}} = (A_\Phi)^{-1}$

Beweis:

Φ Isomorphismus $\Leftrightarrow$ Bild $\Phi = V \Leftrightarrow \mathrm{Rg}\, A_\Phi = n \Leftrightarrow A$ regulär. ✓

Nach Satz 15 gilt: $E_n = A_{id_V} = A_{\Phi^{-1}\circ\Phi} = A_{\Phi^{-1}} \cdot A_\Phi$

$\Rightarrow A_{\Phi^{-1}} = (A_\Phi)^{-1}$. ✓

Satz 17:

Seien V, W $\mathbb{K}$-VR'e endl. Dimension, Basen B, B'; V^*, V^* die Dualräume mit den Dualbasen B^*, B'^* und $\Phi: V \to W$ linear. Dann gilt: $A_{\Phi^T} = (A_\Phi)^T$.

Beweis:

Seien $A_\Phi = ((a_{ij}))$, $A_{\Phi^T} = ((c_{ij}))$, $B = (x_1, \dots, x_n)$, $B' = (y_1, \dots, y_m)$

$B^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $B'^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$

$x_k^*(x_j) = \delta_{kj}$, y_k^* analog.

Es gilt $\Phi^T(y^*) = y^* \circ \Phi \quad \forall y^* \in W^*$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Phi^T(y_e^*) = y^* \circ \Phi \\ \quad \overset{\shortparallel}{\sum_{j=1}^n c_{je} x_j^*} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\sum_{j=1}^n c_{je} \underbrace{x_j^*(x_k)}_{\delta_{jk}} = c_{ke}}{\overset{}{(y_e^* \circ \Phi)(x)}} = y_e^*(\Phi(x_k)) = y_e^*\left(\sum_{i=1}^m a_{ik} y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^m a_{ik} \underbrace{y_e^*(y_i)}_{\delta_{ei}}$$

$$= \underline{\underline{a_{ek}}}$$

Beispiel:

(a) V $\qquad W$ $\qquad \mathbb{R}$-VR'e (Fehler im Skript)

$x_1, x_2, x_3 \qquad y_1, y_2, y_3, y_4$

$\Phi: V \to W$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(x_1) = y_1 - y_2 + 3y_3 - y_4 \\ \Phi(x_2) = 2y_1 + y_2 + 7y_3 + 2y_4 \\ \Phi(x_3) = 3y_2 + y_3 + 4y_4 \end{array}\right\} \Rightarrow A_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Kern $\Phi = ?$: $A_\Phi \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = 0$ lösen $\Rightarrow L_h = [\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$

$\Rightarrow$ Kern $\Phi = [2x_1 - x_2 + x_3]$